Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

30 Maggio 2018
Prova Intermedia

Il tempo per la prova è di 3 ore. Durante la prova non è permesso l'uso di appunti e libri.

Esercizio 1
Sia $Q_k(x, y, z)$ la forma quadratica definita sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 10 & k & -3 \\ k & 10 & 3 \\ -3 & 3 & k+1 \end{pmatrix},$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(i) Si scriva esplicitamente un'espressione analitica per $Q_k(x, y, z)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la forma quadratica Q_k risulta definita positiva?

(ii) Per $k = 1$, esibire una base diagonalizzante ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

(iii) Trovare una base $\mathcal{B}$ dello spazio $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e tale che $\mathcal{B}$ sia ortogonale rispetto al prodotto scalare indotto dalla forma quadratica definita da A_2.

Esercizio 2
Si consideri in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la famiglia di coniche piane

$$C_k : kx^2 + 2xy + (k+2)y^2 - 2y = 0.$$

(i) Si determini al variare di k in $\mathbb{R}$ di quale conica affine si tratta. Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui C_k è degenere si calcolino le sue rette componenti.

(ii) Si scriva l'affinità che porta in forma canonica C_{-1} per $k = -1$.

(iii) Si calcolino con il metodo del risultante le intersezioni di C_1 e C_2.

Soluzione dell'esercizio 1 (i) Dalla matrice possiamo ricavare la formula esplicita per la forma quadratica che è:

$$Q_k(x,y,z) = 10x^2 + 2kxy - 6xz + 10y^2 + 6yz + (k+1)z^2.$$

Invece per trovare per quali valori di k la matrice A_k è definita positiva, basta considerare i minori principali e porli tutti maggiori di 0:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 10 \end{vmatrix} &= 10 > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{R}. \\
\begin{vmatrix} 10 & k \\ k & 10 \end{vmatrix} &= 100 - k^2 > 0 \qquad -10 < k < 10. \\
\begin{vmatrix} 10 & k & -3 \\ k & 10 & 3 \\ -2 & 3 & k+1 \end{vmatrix} &= 10(10k + 10 - 9) - k(k^2 + k + 9) - 3(3k + 30) = \\
&= 100k + 100 - 90 - k^3 - k^2 - 9k - 9k - 90 = \\
&= -k^3 - k^2 + 82k - 80 > 0 \\
-(k-1)(k-8)(k+10) > 0 &\qquad k < -10 \wedge 1 < k < 8.
\end{aligned}$$

Affinché tutte queste relazioni valgano contemporaneamente, si ha che $1 < k < 8$. Quind in corrispondenza di tali valori di k, la matrice A_k è definita positiva.

(ii) Dobbiamo considerare la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -3 \\ 1 & 10 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e calcolarne il polinomio caratteristico per trovare gli autovalori. Allora

$$\begin{aligned}
P_{A_1}(\lambda) = |A_1 - \lambda I| = &\begin{vmatrix} 10-\lambda & 1 & -3 \\ 1 & 10-\lambda & 3 \\ -3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (10-\lambda)(20 - 12\lambda + \lambda^2 - 9) - (2 - \lambda + 9) - 3(3 + 30 - 3\lambda) = \\
&= -\lambda^3 + 22\lambda - 121\lambda^2 = -\lambda(\lambda^2 - 22\lambda + 121) = \\
&= -\lambda(\lambda - 11)^2.
\end{aligned}$$

Quindi questa matrice ha due autovalori reali $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 11$, inoltre siccome la matrice è simmetrica sappiamo che esiste sempre una base ortogonale formata da autovettori. Troviamo, allora, questi autovettori: per quanto riguarda $\lambda_1 = 0$, dobbiamo calcolare semplicemente un vettore che generi il nucleo, cioè risolvere il sistema omogeneo con l'algoritmo di Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & -3 \\ 1 & 10 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 0 & 33 & 11 \\ 0 & 99 & 33 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi una base per l'autospazio V_0 è

$$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per quanto riguarda l'autospazio V_{11}, otteniamo che una base per esso è dato dal nucleo di $A_1 - 11I$, cioè

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che corrisponde all'equazione $x = -3z + y$. Quindi una base per V_{11} è data da:

$$V_{11} = \langle t_1, t_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Sappiamo già che autovettori relativi a diversi autospazi sono ortogonali, mentre per quanto riguarda V_{11} abbiamo bisogno di una base **ortogonale**, che possiamo trovare con l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sui due vettori che abbiamo trovato:

$$w_1 = t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = t_2 - \frac{\langle t_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi una base ortonormale diagonalizzante è data dai vettori:

$$u_1 = \frac{\sqrt{11}}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{\sqrt{22}}{11} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Consideriamo lo spazio ortogonale rispetto v_1, che sarà dato dal prodotto

$$(1, 0, 1) A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7x + 5y = 0.$$

Quindi prendiamo come v_2 un vettore che soddisfi questa equazione, ad esempio: $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Troviamo quindi adesso un equazione per lo spazio perpendicolare a v_2 nello stesso modo di prima:

$$(0, 0, 1) A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3x + 3y + 3z = 0.$$

Quindi il terzo vettore v_3 dovrà essere preso necessariamente nello spazio $\langle v_1, v_2 \rangle^{\perp}$, cioè che soddisfi il sistema

$$\begin{cases} 7x + 5y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Quindi $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix}$. Sappiamo che i tre vettori sono automaticamente indipendenti perché il prodotto scalare rispetto A_2 è definito positivo e quindi vale la relazione che preso W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, allora

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp}.$$

Quindi i vettori cercati sono

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soluzione dell'esercizio 2 (i) La matrice che rappresenta la famiglia di coniche C_k è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & k & 1 \\ -1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}.$$

Una conica è degenere se il suo determinante è nullo, quindi calcoliamo il determinante di A e notiamo che esso è $-k$, che è uguale a 0 se e solo se $k = 0$. In questo caso la conica corrispondente ha come equazione

$$C_0 : 2xy + 2y^2 - 2y = 0 \Longleftrightarrow 2y(x + y - 1) = 0,$$

quindi le sue due rette componenti sono: $y = 0$ e $x + y - 1 = 0$. Per capire il tipo di conica è sufficiente considerare il segno del determinante della matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k+2 \end{pmatrix},$$

che è uguale a $k^2 + 2k - 1$, questo si annulla solo per $k = -1 \pm \sqrt{2}$. Le informazioni sul segno ci dicono che:

- <u>Se $k < -1 - \sqrt{2}$ e $k > -1 + \sqrt{2}$</u>:
  In questo caso è sicuramente un'ellisse. Per verificare quando è a punti reali o non reali calcoliamo il segno della seguente quantità

  $$Tr(A_0)Det(A) = -2k(k + 1),$$

  che è quindi negativo per $k < -1$ e $k > 0$, che sono interamente contenuti nel nostro intervallo. Quindi essendo questa quantità sempre negativa, abbiamo sempre un'ellisse a punti reali.
- <u>Se $-1 - \sqrt{2} < k < 0$ e $0 < k < -1 + \sqrt{2}$</u>:
  In questo caso abbiamo un'iperbole non degenere.
- <u>Se $k = 0$</u>:
  Siamo nel caso analizzato prima in cui C_0 è un'iperbole degenere.
- <u>Se $k = -1 \pm \sqrt{2}$</u>:
  In questo caso abbiamo una parabola non degenere.

(ii) La nostra equazione diventa $-x^2 + 2xy + y^2 - 2y = 0$ e dal punto precedente sappiamo già che è una iperbole non degenere.

Primo metodo

Vogliamo studiare e diagonalizzare la sua matrice A_0:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico $P(\lambda) = |A_0 - \lambda I| = \lambda^2 - 2 = 0$, ha come soluzioni $\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{2}$, che corrispondono quindi agli autovalori di A_0. I corrispondenti autovettori sono ottenuti considerando i sistemi $A - \lambda_i I = 0$, dove $i = 1, 2$ e sono $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Questo ci fornisce il primo cambio di coordinate date da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Effettuando questa sostituzione otteniamo che la nostra curva diventa

$$(2 + 2\sqrt{2})x'^2 - (2\sqrt{2} - 2)y'^2 + (-1 - \sqrt{2})x' + (\sqrt{2} - 1)y' = 0.$$

Adesso per annullare i termini di primo grado basta effettuare il cambio di variabile seguente:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{1}{2}\frac{(-1-\sqrt{2})}{2+2\sqrt{2}} = x'' + \frac{1}{4} \\ y' = y'' - \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{2}-1)}{2-2\sqrt{2}} = y'' + \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Quindi effettuando anche questa sostituzione otteniamo che l'equazione diventa

$$(2+2\sqrt{2})x''^2 - (2\sqrt{2}-2)y''^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

che moltiplicando tutto per 4 è uguale a

$$8(1+\sqrt{2})x''^2 - 8(\sqrt{2}-1)y''^2 - 1 = 0.$$

Ora per ottenere la forma canonica basta normalizzare i coefficienti:

$$\begin{cases} x''' = \frac{x''}{\sqrt{8(1+\sqrt{2})}} \\ y''' = \frac{y''}{\sqrt{8(\sqrt{2}-1)}}, \end{cases}$$

che porta finalmente alla forma canonica

$$x'''^2 - y'''^2 - 1 = 0.$$

L'affinità cercata è l'**inversa** della composizione dei vari cambiamenti di variabili fatti finora.

Secondo metodo

Completiamo i quadrati

$$-x^2+2xy+y^2-2y = -(x^2-2xy+y^2)+2\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2} = -(x-y)^2+2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2} = 0$$

da cui otteniamo

$$-2(x-y)^2+4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-1=0$$

se appplichiamo il cambio di variabili

$$\begin{cases} x' = 2(y-\frac{1}{2}) \\ y' = \sqrt{2}(x-y) \end{cases}$$

abbiamo che l'equazione è scritta nella forma canonica

$$x'^2 - y'^2 - 1 = 0.$$

Se vogliamo calcolare la trasformazione esplicita basta **invertire** quella appena scritta.

(iii) Calcoliamo il risultante di $C_1 : x^2+2xy+3y^2-2y=0$ e $C_2 : x^2+xy+2y^2-y=0$ rispetto alla variabile x

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2y & 3y^2-2y & 0 \\ 0 & 1 & 2y & 3y^2-2y \\ 1 & y & 2y^2-y & 0 \\ 0 & 1 & y & 2y^2-y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2y & 3y^2-2y \\ y & 2y^2-y & 0 \\ 1 & y & 2y^2-y \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2y & 3y^2-2y & 0 \\ 1 & 2y & 3y^2-2y \\ 1 & y & 2y^2-y \end{pmatrix}$$

$$= -y\det\begin{pmatrix} 2y & 3y^2-2y \\ y & 2y^2-y \end{pmatrix} + (2y^2-y)\det\begin{pmatrix} 1 & 3y^2-2y \\ 1 & 2y^2-y \end{pmatrix} + 2y\det\begin{pmatrix} 2y & 3y^2-2y \\ y & 2y^2-y \end{pmatrix} - (3y^2-2y)\det\begin{pmatrix} 1 & 3y^2-2y \\ 1 & 2y^2-y \end{pmatrix}$$

$$= -y(4y^3-2y^2-3y^3+2y^2)+(2y^2-y)(-y^2+y)+2y(4y^3-2y^2-3y^3+2y^2)-(3y^2-2y)(-y^2+y)$$

$$= -y^4+(2y^2-y)(-y^2+y)+2y^4-(3y^2-2y)(-y^2+y)$$

$$= -y^4-2y^4+2y^3+y^3-y^2+2y^4+3y^4-3y^3-2y^3+2y^2 = 2y^4-2y^3+y^2 = y^2(2y^2-2y+1)$$

da cui otteniamo che per la variabile y l'unico valore reale per un punto di intersezione tra C_1 e C_2 è $y=0$. Dalle equazioni delle due curve abbiamo che quindi l'unica intersezione reale (con molteplicità 2) tra le curve è data dall'origine $\mathcal{O}$.