Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

11 Febbraio 2018
Appello di Febbraio

Il tempo per la prova è di 3 ore. Durante la prova non è permesso l'uso di appunti e libri.

Esercizio 1
Siano (x, y, z) le coordinate nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ rispetto il riferimento affine standard. Definiamo i piani affini di equazioni cartesiane:

$$\pi : hx + (h+1)y + (h+2)z = 1, \qquad \sigma : hx + (h-1)y + (h-2)z = 1, \qquad \tau : x + y + z = h,$$

con $h \in \mathbb{R}$ parametro reale.

(i) Al variare di $h \in \mathbb{R}$, si consideri $\mathcal{R} = \pi \cap \sigma \cap \tau$ e si esplicitino i valori di h per cui $\dim(\mathcal{R}) \neq 0$.

Sia $h = 1$.

(ii) Dopo aver verificato che $\mathcal{R}$ è la retta per $A = (1, 0, 0)$ e $B = (2, -2, 1)$, si trovino le equazioni cartesiane e parametriche del più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ contenente $\mathcal{R}$ e la retta $\mathcal{S}$ di equazioni cartesiane $y = z = 0$.

(iii) Si scriva l'equazione del fascio di piani Σ contenenti la retta $\mathcal{R}$ e si trovino le equazioni cartesiane e parametriche del piano appartenente a Σ e parallelo al piano $\tau : 4x + y - 2z - 3 = 0$.

Esercizio 2
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y + z \\ -3x + y + 2z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare dimensione e base per $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$. Scrivere le equazioni di un sistema lineare le cui soluzioni corrispondono a tutti gli elementi di $\mathrm{Im}(f)$ ed analogamente per $\mathrm{Ker}(f)$. Determinare, se esiste, un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ privo di controimmagine.

(ii) Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dire se la matrice $M_{\mathcal{E}}(f)$ risulta diagonalizzabile ed in caso affermativo, esibire una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante per f.

(iii) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale definito da

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \right\}.$$

Determinare dimensione ed una base per i sottospazi $U \cap \mathrm{Im}(f)$ e $U + \mathrm{Ker}(f)$.

Esercizio 3

Si consideri la spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard. Siano (x, y, z, t) le coordinate di V rispetto alla base canonica. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ sia Q la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da:

$$Q(x, y, z, t) = 2kxt + 2yz$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

(i) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il rango di Q e la sua segnatura.

(ii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, esplicitare, se esiste, una base ortonormale diagonalizzante per Q rispetto al prodotto scalare standard. Scrivere l'espressione polinomiale di Q rispetto alla base scelta.

(iii) Sia B la forma bilineare simmetrica associata a Q e si consideri lo spazio vettoriale W tale che

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Sia $W^{\perp}$ lo spazio vettoriale generato dai vettori di $\mathbb{R}^4$ che sono ortogonali a tutti i vettori di W rispetto a B. Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione di $W^{\perp}$.

Esercizio 4

Si consideri il piano complesso $\mathbb{A}^2$ con coordinate (x, y) e si la curva

$$\mathcal{C} : \ f(x, y) = x^4 + y^4 - xy^2 = 0$$

(i) Si ricavino i punti singolari della curva e della sua chiusura proiettiva.

(ii) Per ogni punto singolare P si ricavi la molteplicità del punto per la curva, le tangenti principali, la molteplicità con cui esse tagliano la curva e gli eventuali altri punti di intersezione tra le tangenti e la curva.

(iii) Ricavare gli asintoti di C e le tangenti principali nei suoi punti all'infinito.

Esame scritto di Geometria II

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

Appello di Febbraio 2019

Esercizio 5

Si consideri il piano complesso $\mathbb{A}^2$ con coordinate (x, y) e si la curva

$$\mathcal{C}: \ f(x, y) = x^4 + y^4 - xy^2 = 0$$

(i) Si ricavino i punti singolari della curva e della sua chiusura proiettiva.

(ii) Per ogni punto singolare P si ricavi la molteplicità del punto per la curva, le tangenti principali, la molteplicità con cui esse tagliano la curva e gli eventuali altri punti di intersezione tra le tangenti e la curva.

(iii) Ricavare gli asintoti di C e le tangenti principali nei suoi punti all'infinito.

Esercizio 6

Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$ e si consideri la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che, se $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q) \in X$ sono sulla stessa retta verticale allora $d(P, Q) = |y_Q - y_P|$ mentre in caso contrario si ha $d(P, Q) = |y_P| + |y_Q| + |x_P - x_Q|$.

(i) Dimostrare che (X, d) è uno spazio metrico e che su ogni semiretta verticale la distanza indotta è quella euclidea;

(ii) Descrivere le palle aperte di centro $(0, 0)$ e $(0, 1)$;

(iii) Si considerino le successioni $(P_n)_{n\geq 1}$ e $(Q_n)_{n\geq 1}$ con $P_n = (1/n, 1)$ e $Q_n = (1, 1/n)$. Si dica se le successioni convergono in (X, d);

(iv) Chiamando τ la topologia definita dalla metrica, dire se (X, τ) è T_2 e compatto.

Soluzione dell'esercizio 1 (i) Il problema di trovare l'intersezione è equivalente a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} hx + (h+1)y + (h+2)z = 1 \\ hx + (h-1)y + (h-2)z = 1 \\ x + y + z = h. \end{cases}$$

Utilizziamo l'algoritmo di Gauss per risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} h & h+1 & h+2 & 1 \\ h & h-1 & h-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & h \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & h \\ 0 & 1 & 2 & 1-h^2 \\ 0 & -1 & -2 & 1-h^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & h \\ 0 & 1 & 2 & 1-h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-h^2) \end{pmatrix}$$

Quindi per $h \neq \pm 1$ non ci sono soluzioni, mentre per $h = \pm 1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1, dato che la matrice dei coefficienti orlata ha rango 2, quindi

$$\dim(\mathcal{R}) = \begin{cases} 1 & \text{se } h = \pm 1, \end{cases}$$

(ii) Per $h = 1$, la retta $\mathcal{R}$ ha equazioni cartesiane:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Sostituendo i valori di A e B, si può notare che entrambe queste equazioni vengono soddisfatte e dato che per ogni coppia di punti passa una ed una sola retta, questa è la retta che passa per A e B. Dalle coordinate di questi due punti è anche evidente che $A \in \mathcal{S}$ e $B \notin \mathcal{S}$, allora le due rette $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ sono incidenti nel punto A. La giacitura di $\mathcal{R}$ è $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, che rappresenta la soluzione del sistema lineare omogeneo associato alle equazioni cartesiane di $\mathcal{R}$, mentre la giacitura di $\mathcal{S}$ è $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Quindi l'equazione cartesiana del piano che contiene $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ è data da:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

che, semplificando significa $y + 2z = 0$, mentre le equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = u \\ y = -2v \\ z = v \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

(iii) Il fascio di piani di asse $\mathcal{R}$ è

$$\Sigma : \lambda(x + y + z - 1) + \mu(y + 2z) = 0 \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Le equazioni parametriche del piano τ sono, esplicitando rispetto y,

$$\tau : \begin{cases} x = v \\ y = 3 + 2u - 4v \\ z = u \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Quindi la giacitura di τ è $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Verifichiamo che questi due vettori soddisfino il sistema lineare omogeneo associato all'equazione cartesiana del fascio di piani:

$$\begin{cases} \lambda(0 + 2 + 1) + \mu(2 + 2) = 0 \\ \lambda(1 - 4 + 0) + \mu(-4 + 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\lambda + 4\mu = 0.$$

Quindi, imponendo $\lambda = 4$ e $\mu = -3$ e sostituendo nell'equazione cartesiana di Σ, otteniamo

$$\begin{aligned} 4(x + y + z - 1) - 3(y + 2z) = 0 \\ 4x + y - 2z - 4 = 0, \end{aligned}$$

che è l'equazione cartesiana del piano cercato. Per trovare quelle parametriche, esplicitiamo rispetto a y e otteniamo:

$$\begin{cases} x = u \\ y = 4 - 4u + 2v \\ z = v \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Soluzione dell'esercizio 2 (i) La matrice associata ad f rispetto la base $\mathcal{E}$ è

$$M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per trovare una base per il nucleo, basta risolvere il sistema omogeneo associato utilizzando l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & 5 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che corrisponde al sistema cercato per $\mathrm{Ker}(f)$

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -8y + 5z = 0 \end{cases}.$$

Il nucleo ha quindi dimensione 1 e $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$. Per quanto riguarda l'Immagine, sappiamo che, per il teorema Nullità più Rango, $\dim(Im(f)) = 2$ e per trovare una sua base basta prendere due colonne indipendenti nella matrice $M_{\mathcal{E}}(f)$:

$$Im(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Sappiamo che le equazioni che compongono il sistema lineare per l'Immagine devono in realtà essere una sola equazione, in quanto per il teorema di Rouchè-Capelli, un sistema con 1 equazione in $\mathbb{R}^3$, genera uno spazio delle soluzioni di dimensione $3 - 1 = 2$, come nel nostro caso. Per trovare questa equazione possiamo considerare un generico vettore dell'Immagine:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

che porta a scrivere il sistema in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = a - 3b \\ y = -3a + b \\ z = -2a - 2b \end{cases}.$$

Per trovare l'equazione cartesiana, basta esplicitare i parametri:

$$\begin{cases} a = x + 3b \\ y = 3x - 9b + b = -3x - 8b \\ z = -2x - 6b - 2b = -2x - 8b \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = x + 3b \\ 8b = -3x - y \\ z = -2x + 3x + y = x + y \end{cases},$$

quindi l'equazione cartesiana cercata per l'Immagine è $x + y - z = 0$. Infine, per trovare w basta prendere un vettore che non soddisfi questa equazione, in quanto non appartenendo all'Immagine, non può avere controimmagine: per esempio $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Per vedere se la matrice è diagonalizzabile, calcoliamo il suo polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 7) + 3(3\lambda - 5) + (-2\lambda + 8) = -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 4).$$

Questo polinomio ha come soluzioni $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 1$, che hanno tutti molteplicità algebrica 1, di conseguenza anche quella geometrica deve essere 1. Quindi la matrice è diagonalizzabile. Per trovare una base diagonalizzante, possiamo considerare la base formata dagli autovettori. Il primo autovettore v_1, relativo a $\lambda_1 = 0$ è il vettore che genera il nucleo, cioè $v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Per trovare gli altri risolviamo i sistemi $A - \lambda_i I = 0$, con $i = 2, 3$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che corrisponde al sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Quindi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Procediamo analogamente per v_3, l'autovettore relativo a $\lambda_3 = 1$:

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cioè il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases},$$

che ha soluzione $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Quindi la base diagonalizzante è $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(iii) Possiamo trovare una base per U risolvendo il suo sistema lineare, che è equivalente a

$$\begin{cases} x = y \\ z = 2x \end{cases},$$

quindi $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Allora U è uno spazio di dimensione 1 e il suo vettore generatore soddisfa l'equazione cartesiana dell'Immagine; ciò comporta che $U \cap Im(f) = U$ e quindi la dimensione di questa intersezione è 1 con lo stesso vettore generatore di U. Invece per quanto rigurda $U + \mathrm{Ker}(f)$, possiamo vedere che entrambi i vettori generatori hanno dimensione 1 e non sono linearmente dipendenti, allora esso ha dimensione 2 e una sua base è data dall'insieme dei due vettori:

$$U + \mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Soluzione dell'esercizio 3 (i) Chiamiamo A_k la matrice associata a Q al variare di $k \in \mathbb{R}$. Allora

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango di Q al variare di $k \in \mathbb{R}$ è equivalente a considerare il rango della matrice A_k, quindi possiamo considerare il determinante della matrice: $\mathrm{Det}(A_k) = k^2$. Quindi se $k \neq 0$, la matrice A_k ha determinante diverso da 0 e Q ha rango massimo, altrimenti se $k = 0$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2. Allora $\mathrm{Rk}(Q) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq 0, \\ 2 & \text{se } k = 0. \end{cases}$

Per calcolare la segnatura di Q al variare di k, calcoliamo gli autovalori di A_k. Cerchiamo quindi il suo polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = |A_k - \lambda I_4| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & k \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ k & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = (\lambda^2 - k^2)(\lambda^2 - 1).$$

Allora gli autovalori della matrice sono $\{+1, -1, +k, -k\}$, che corrispondono alla segnatura:

$$(p, q) = \begin{cases} (2, 2) & \text{se } k \neq 0, \\ (1, 1) & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

(ii) La matrice A_k è simmetrica, quindi, per il teorema spettrale, è sempre diagonalizzabile tramite una base ortonormale. Per calcolare una base con queste caratteristiche ricaviamo una base ortonormale formata da autovettori di $\mathbb{R}^4$. Abbiamo tre casi distinti:

- $k = 0$
  In questo caso,

  $$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ed ha autovalori $\{0 \text{ (con molteplicità algebrica 2)}, 1, -1\}$. L'autospazio $V_0 = \mathrm{Ker}(A_0)$ corrisponde ai vettori che soddisfano il sistema

  $$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

  Quindi una base per $\mathrm{Ker}(A_0) = V_0$ è

  $$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

che ha quindi dimensione 2. Mentre per quanto riguarda gli altri due autospazi V_{-1} e V_1:

$$V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

una base ortonormale diagonalizzante per A_0 è quindi data da tutti i vettori diagonalizzante normalizzato, poiché autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali e i due vettori di V_0 sono ortonormali per costruzione. Quindi la base cercata è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La forma quadratica si scriverà, in questa base, come $Q(x', y', z', t') = -z'^2 + t'^2$.

- $k = \pm 1$
  Supponiamo $k = 1$. In questo caso

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e gli autovalori sono $\{1, -1\}$ entrambi con molteplicità algebrica 2. Dobbiamo quindi trovare una base per V_1 e V_{-1}. I vettori di V_{-1} soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

che sono ortogonali. Analogamente i vettori di V_1 soddisfano

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

E quindi

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

che anche in questo caso sono ortogonali. Una base ortonormale diagonalizzante è quindi data dagli autovettori normalizzati:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'espressione della forma quadratica rispetto a questa base sarà

$$Q(x', y', z', t') = x'^2 + y'^2 - z'^2 - t'^2.$$

In modo analogo si procede per il caso $k = -1$: la segnatura non cambia.

- Se $k \neq 0$ e $k \neq \pm 1$
  In questo caso abbiamo tutti autovalori distinti, allora gli autovettori corrispondenti saranno automaticamente ortogonali e una base ortonormale diagonalizzante è data dall'insieme di essi normalizzati. L'autospazio V_k corrisponde ai vettori che soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

  V_{-k} a quelli che soddisfano

$$\begin{cases} x = -t \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

  V_1 a quelli che soddisfano

$$\begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \\ z = y \end{cases}$$

  ed infine i vettori in V_{-1} soddisfano

$$\begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \\ z = -y \end{cases} .$$

  Quello che otteniamo è che:

$$V_k = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_{-k} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

  Quindi abbiamo che la base ortonormale è data da:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

  L'espressione della forma quadratica rispetto a questa base sarà

$$Q(x', y', z', t') = kx'^2 - ky'^2 - z'^2 + t'^2.$$

(iii) Notiamo che i vettori di W sono linearmente indipendenti, allora $\mathrm{Dim}(W) = 3$ e abbiamo due casi:

- Se $k \neq 0$
  In questo caso la forma quadratica Q è non degenere, quindi $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^4) = \mathrm{Dim}(W) + \mathrm{Dim}(W^\perp)$. Allora $\mathrm{Dim}(W^\perp) = \mathrm{Dim}(\mathbb{R}^4) - \mathrm{Dim}(W) = 4 - 3 = 1$.
- Se $k = 0$
  In questo caso abbiamo una forma quadratica degenere, allora dati $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$, i vettori della base di W, e $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, un generico vettore in $\mathbb{R}^4$, imponiamo che questo sia ortogonale,

rispetto a B, ai vettori della base scelta. Questo equivale ad assumere che $\mathbf{x}^t A_0 \mathbf{v_1}$, $\mathbf{x}^t A_0 \mathbf{v_2}$ e $\mathbf{x}^t A_0 \mathbf{v_3}$ siano tutti nulli. In questo modo otteniamo un sistema di equazioni soddisfato da tutti e soli i vettori in $W^\perp$.
Nello specifico avremo

$$(x,y,z,t)A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4,$$

$$(x,y,z,t)A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = z = 0,$$

$$(x,y,z,t)A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = y - z = 0.$$

Quindi

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e $\mathrm{Dim}(W^\perp) = 2$.

Soluzione dell'esercizio 4
Calcoliamo le derivate di f per cercare i punti singolari affini

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2xy = 2y(2y^2 - x)$$

da cui abbiamo per $y = 0$ come unico punto singolare $P_1 = (0,0)$. Se invece imponiamo che $2y^2 = x$ otteniamo dalla prima equazione che $8x^3 - x = x(8x^2 - 1) = 0$ e quindi abbiamo come candidati punti singolari $P_2 = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt[4]{2}})$ e $P_3 = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt[4]{2}})$ che però non appartengono alla curva. La molteplicità di $\mathcal{C}$ nell'origine di $x = 0$ è 3 e le tangenti principali hanno equazione $x = 0$ e $y = 0$. La molteplicità d'intersezione di $x = 0$ con la curva in $\mathcal{O}$ pari 4 a visto che $f(0,t) = t^4$ (chiaramente non ci possono essere altre intersezioni tra tale retta e la curva in virtù del teorema di Bézout). Per quanto riguarda invece la molteplicità d'intersezione della curva con $y = 0$ abbiamo anche in questo caso che essa è esattamente 4. Calcoliamo ora i punti all'infinito di $\mathcal{C}$, partiamo omogeneizzando l'equazione per trovare quella di $\bar{C}$

$$\bar{C}_a : F(x_0, x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_0 x_1 x_2^2 = 0$$

da cui ricaviamo che la curva ha come punti all'infinito $Q_1^\infty = [0, \sqrt{i}, 1]$, $Q_2^\infty = [0, -\sqrt{i}, 1]$, $Q_3^\infty = [0, i\sqrt{i}, 1]$ e $Q_4^\infty = [0, -i\sqrt{i}, 1]$. Visto che la retta $x_0 = 0$ ha 4 intersezioni con la curva tutti i punti all'infinito saranno lisci (altrimenti andremmo a contraddire il teorema di Bézout). Per cercare le tangenti nei punti all'infinito calcoliamo le derivate di F

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = -x_1 x_2^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 4x_1^3 - x_0 x_2^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 4x_2^3 - 2x_0 x_1 x_2$$

da cui otteniamo le equazioni delle tangenti rispettivamente di Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4

$$
\begin{aligned}
r_1 &: \sqrt{i}x_0 + 4\sqrt[3/2]{i}(x_1 - \sqrt{i}) + 4x_2 = 0\\
r_2 &: \sqrt{i}x_0 - 4\sqrt[3/2]{i}(x_1 + \sqrt{i}) + 4x_2 = 0\\
r_3 &: \sqrt{i}x_0 - 4i\sqrt[3/2]{i}(x_1 + i\sqrt{i}) + 4x_2 = 0\\
r_4 &: \sqrt{i}x_0 + 4i\sqrt[3/2]{i}(x_1 - i\sqrt{i}) + 4x_2 = 0
\end{aligned}
$$

e visto che nessuna di esse è la retta $x_0 = 0$ abbiamo che i quattro asintoti sono dati dalle rette in questione deomogenizzate rispetto ad x_0.

Soluzione dell'esercizio 5
Si veda la soluzione dell'Esercizio 4.

Soluzione dell'esercizio 6
L'annullamento e la simmetria sono ovvie dalla definizione. Bisogna dimostrare la disuguaglianza triangolare. Se i tre punti sono sulla semiretta verticale con origine sull'asse x la funzione d coincide con la distanza euclidea ristretta ai punti della semiretta (la cosa è ovvia dalla definizione di d) e quindi la disuguaglianza triangolare vale. Se tutti e tre i punti $P_i = (x_i, y_i)$ sono su semirette diverse si ha

$$d(P_1, P_3) = |y_1| + |y_3| + |x_3 - x_1| \leq |y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_3| + |x_3 - x_1|.$$

Usando la disuguaglianza triangolare tra i reali abbiamo $|x_3 - x_1| \leq |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2|$ da cui deduciamo

$$d(P_1, P_3) =\leq |y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_3| + |x_3 - x_1| + |x_2 - x_1| = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Il caso in cui due punti sono sulla stessa semiretta e il terzo no si analizza in modo analogo.

Si consideri la palla aperta $B = B_r(O)$ di centro l'origine e raggio r. I punti della semiretta verticale passante per l'origine che appartengono a B sono tutti e soli quelli con ordinata minore di r. Se invece consideriamo la semiretta verticale con i punti di ascissa x_0, abbiamo che un punto $P = (x_0, y_0)$ sulla semiretta appartiene a B se e solo se $|x_0| + |y_0| < r$. Da questo si deduce che B coincide con il triangolo con vertici $(-r, 0), (r, 0)$ e $(0, r)$ (i punti sui lati obliqui non sono nella palla). Sia ora B la palla di centro $P = (0, 1)$ e raggio r. Supponiamo inizialmente $r \leq 1$. Un punto $Q = (x_0, y_0) \neq P$ che non sta sulla semiretta per $(0, 1)$ ha distanza da P uguale a $1 + |y_0| + |x_0|$ quindi non potrà mai appartenere a B. Per $r \leq 1$ si ha quindi che $B = \{0\} \times (1 - r, r + r)$. Supponiamo ora $r > 1$. Mostriamo che $B = B_r((0, 1)) = B_{r-1}((0, 0)) \cup (\{0\} \times [0, 1 + r))$. Che tutti i punti di $\{0\} \times [0, 1 + r))$ appartengano a B e che questi sono tutti e soli quelli della semiretta per P è chiaro. Se un punto $Q = (x_0, y_0)$ su un'altra semiretta appartiene a B allora $|x_0| + |y_1| + 1 < r$ e quindi

$$|x_0| + |y_1| < r - 1$$

che sono proprio i punti di $B_{r-1}((0, 0))$.

Dimostriamo che la successione $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è di Cauchy (e quindi non può avere limite). Supponiamo per assurdo che sia di Cauchy. Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m > N$ si ha $d(P_n, P_m) < 1/2$. Per $n \neq m$ si ha che P_n e P_m sono su due semirette verticali distinte quindi

$$1/2 > d(P_n, P_m) = |1/n - 1/m| + |1| + |1| = 2 + |1/n - 1/m| > 2$$

che è assurdo. Di conseguenza la successione non è di Cauchy e non può avere limite in (X, d). La successione Q_n ha invece limite: il punto $(1, 0)$. Per dire che ha limite basta osservare che è contenuta in una semiretta per l'origine sulla quale abbiamo dimostrato che la distanza è quella euclidea.

Essendo (X, τ) uno spazio topologico metrizzabile si ha che è T_2. Non è compatto infatti la collezione di palle aperte

$$\{B_n(O)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

è un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti.