Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2023/2024

Febbraio 2025

Esercizio 1. Sia $\mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ lo spazio affine reale 3-dimensionale con coordinate $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$. Si considerino le seguenti rette in forma parametrica in $\mathbb{A}^3$:

$$r_k\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2kt \\ z = k - 1 + kt \end{cases}_{t\in\mathbb{R}}, \qquad \ell\colon \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + 2s \\ z = s \end{cases}_{s\in\mathbb{R}},$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(1) Studiare la posizione reciproca di r_k e ℓ, ossia trovare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si verifica che:

- r_k è parallela ad ℓ;
- r_k interseca ℓ;
- r_k e ℓ sono sghembe;

(2) Dimostrare che, quando r_k interseca ℓ, r_k e ℓ non sono ortogonali;

(3) Trovare una equazione cartesiana $f(x, y, z) = 0$ del piano π contenente r_1 ed ℓ;

(4) Dire se esiste un $k \in \mathbb{R}$ tale che r_k e π sono ortogonali.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ il piano affine reale con coordinate (x, y). Si consideri la seguente cubica in $\mathbb{A}^2$:

$$\mathcal{C}\colon \qquad f(x, y) = x^3 - y^3 + x^2 - 2xy - y^2 = 0.$$

Sia $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ il piano proiettivo reale con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si identifichi $\mathbb{A}^2 \cong \{x_0 \neq 0\}$ e si denoti con $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2$ la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$.

(1) Si dimostri che $\mathcal{C}$ ha un unico punto singolare;

(2) Si scrivano le equazioni delle tangenti principali a $\mathcal{C}$ nel punto singolare;

(3) Si scriva l'equazione di $\overline{\mathcal{C}}$ e si trovino i punti all'infinito di $\mathcal{C}$;

(4) Si trovino gli asintoti di $\mathcal{C}$;

(5) Si dica se la retta r di equazione $x + 2y + 1 = 0$ è tangente a $\mathcal{C}$ in un punto P.

Esercizio 1. (1) Studiamo i 3 casi indicati.

- r_k è parallela ad ℓ se e solo se r_k ed ℓ hanno la stessa direzione. Un vettore direzione di r_k e un vettore direzione di ℓ sono dati rispettivamente da:
$$u_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2k \\ k \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
r_k ed ℓ hanno la stessa direzione se e solo se essi sono linearmente dipendenti. Questa condizione è equivalente ad imporre:
$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} - & u_k & - \\ - & v & - \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2k & k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$
Segue che r_k ed ℓ sono parallele se e solo se $k = 1$.
- Fissato $k \in \mathbb{R}$, r_k interseca ℓ se e solo se esistono $s, t \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema ha soluzione:
$$\begin{cases} 1 + t = 1 + s \\ 2kt = 2 + 2s \\ k - 1 + kt = s \end{cases}.$$
Dalla prima equazione segue che, se il sistema ha soluzione, allora $s = t$. Da questo e dalla seconda equazione segue che per $k = 1$ il sistema non ha soluzione, ossia in questo caso le rette sono parallele (per il punto precedente) ma distinte. Invece, per $k \neq 1$, $s = t = \frac{1}{k-1}$. Sostituendo nell'ultima equazione, si ottiene che:
$$k - 1 + \frac{k}{k-1} = \frac{1}{k-1} \iff k - 1 + \frac{k-1}{k-1} = 0 \iff k = 0.$$
Segue che r_k interseca ℓ se e solo se $k = 0$;
- r_k ed ℓ sono sghembe se non si intersecano e non sono parallele. Per i punti precedenti, questo succede se e solo se $k \neq 0, 1$.

Ricapitolando:
$$r_k \text{ e } \ell \text{ sono: } \begin{cases} \text{parallele} & \text{se } k = 1 \\ \text{incidenti} & \text{se } k = 0 \\ \text{sghembe} & \text{se } k \neq 0, 1 \end{cases}.$$

(2) Per il punto precedente, r_k ed ℓ sono incidenti se e solo se $k = 0$. In questo caso, una loro direzione è data rispettivamente dai vettori:
$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Poiché u_0 non è ortogonale a v, r_0 non è ortogonale ad ℓ.

(3) Dal punto (1) sappiamo che r_1 ed ℓ sono parallele e distinte. Dunque, esiste un unico piano π che le contiene. La retta r_1 ha equazioni parametriche:

$$r_1\colon \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}_{t \in \mathbb{R}}$$

da cui si ricavano facilmente le equazioni cartesiane:

$$r_1\colon \quad \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} .$$

Il fascio di piani $\pi_{\lambda\mu}$ contenente r_1 ha equazione:

$$\pi_{\lambda\mu}\colon \quad \lambda(x - z - 1) + \mu(y - 2z) = 0.$$

Per trovare una equazione di π, è sufficiente imporre il passaggio di $\pi_{\lambda\mu}$ per un punto di ℓ. Per esempio, per $s = 0$, si ottiene che $P = (1, 2, 0) \in \ell$. Imponendo il passaggio di P per $\pi_{\lambda\mu}$ si ha che:

$$\lambda(1 - 0 - 1) + \mu(2 - 0) = 0 \implies \mu = 0$$

da cui segue che una equazione di π è data da:

$$\pi\colon \qquad f(x, y, z) = x - z - 1 = 0.$$

(4) Il piano π è ortogonale alla retta r_k se e solo se r_k ha direzione parallela alla direzione ortogonale di π. Dall'equazione di π, segue che un vettore ad esso ortogonale è:

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

mentre, come nei punti precedenti, un vettore direzione di r_k è dato da:

$$u_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2k \\ k \end{pmatrix}.$$

Per quanto detto in precedenza, π e r_k sono ortogonali se e solo se u_k e w sono linearmente dipendenti, ossia:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} - & u_k & - \\ - & w & - \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2k & k \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

Visto che questa condizione non è soddisfatta per nessun $k \in \mathbb{R}$, si ha che r_k non è mai ortogonale a π.

Esercizio 2. (1) In questo caso, è opportuno notare che il termine omogeneo di grado più basso del polinomio f che definisce $\mathcal{C}$ ha grado 2. Pertanto, l'origine $P = (0,0)$ è un punto di molteplicità 2 su $\mathcal{C}$. Da ciò segue che la curva proiettiva $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2$ ha un punto singolare $[1,0,0]$ di molteplicità 2. Per il teorema di Bézout (si veda l'Esercizio 2 della provetta 2023/24), si ha che $\overline{\mathcal{C}}$ ha un unico punto singolare, ossia $[1,0,0]$. Da ciò si ottiene che $\mathcal{C}$ ha un unico punto singolare, l'origine $P = (0,0)$.

(2) Poiché il punto singolare è l'origine $P = (0,0)$, per trovare le tangenti principali a $\mathcal{C}$ nel punto P è sufficiente scomporre il termine omogeneo di grado più basso del polinomio f, ossia:

$$g(x,y) = x^2 - 2xy - y^2.$$

Per fare ciò, usiamo il seguente metodo: consideriamo:

$$\frac{g(x,y)}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) - 1$$

e, ponendo $t = \frac{x}{y}$, otteniamo il polinomio:

$$h(t) = t^2 - 2t - 1.$$

Le radici del polinomio sono $\alpha_1 = -1 + \sqrt{2}$ e $\alpha_2 = -1 - \sqrt{2}$, pertanto:

$$h(t) = (t + 1 - \sqrt{2})(t + 1 + \sqrt{2}),$$

da cui segue che:

$$\frac{g(x,y)}{y^2} = \left(\frac{x}{y} + 1 - \sqrt{2}\right)\left(\frac{x}{y} + 1 + \sqrt{2}\right) \implies g(x,y) = (x + (1-\sqrt{2})y)(x + (1 + \sqrt{2}y)).$$

Pertanto, le tangenti principali a $\mathcal{C}$ in P sono:

$$\begin{aligned} \tau_1 &: \qquad x = (-1+\sqrt{2})y \\ \tau_2 &: \qquad x = (-1-\sqrt{2})y \end{aligned}$$

(3) Omogeneizzando il polimio f che definisce $\mathcal{C}$ rispetto alla nuova variabile x_0 si ottiene:

$$\overline{\mathcal{C}}: \qquad F(x_0,x_1,x_2) = x_1^3 - x_2^3 + x_0x_1^2 - 2x_0x_1x_2 - x_0x_2^2 = 0$$

I punti all'infinito soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ F(0,x_1,x_2) = x_1^3 - x_2^3 = 0 \end{cases}.$$

Visto che vogliamo le soluzioni reali, c'è solo un punto all'infinito, ossia $x_0 = 0, x_1 = x_2$, che dà vita al punto $P' = [0,1,1]$.

(4) Per trovare gli asintoti, dobbiamo calcolare la tangenti proiettive a $\overline{\mathcal{C}}$ nei punti all'infinito e deomogenizzare rispetto a $x_0 = 1$. Dal punto precedente, sappiamo che l'unico punto all'infinito è $P' = [0, 1, 1]$. Troviamo il gradiente del polinomio F che definisce $\overline{\mathcal{C}}$:

$$\nabla F(x_0, x_1, x_2) = (x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2, 3x_1^2 + 2x_0x_1 - 2x_0x_2, -3x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2)$$

e calcoliamolo nel punto P':

$$\nabla F(0, 1, 1) = (-2, 3, -3).$$

La tangente proiettiva a $\overline{\mathcal{C}}$ nel punto P' è data da:

$$\tau_\infty\colon \qquad -2x_0 + 3x_1 - 3x_2 = 0.$$

Operando la sostituzione $x_0 \to 1, x_1 \to x, x_2 \to y$, si ottiene l'equazione dell'asintoto di $\mathcal{C}$:

$$a\colon \qquad -2 + 3x - 3y = 0.$$

(5) Prima di tutto, troviamo i punti di intersezione tra $\mathcal{C}$ e r. Questi sono i punti che soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + x^2 - 2xy - y^2 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - y^3 + x^2 - 2xy - y^2 = 0 \\ x = -2y - 1 \end{cases}.$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima, si ottiene:

$$\begin{aligned} &(-2y-1)^3 - y^3 + (-2y-1)^2 + 2y(2y+1) - y^2 \\ &= -8y^3 - 1 - 6y - 12y^2 - y^3 + 4y^2 + 4y + 1 + 4y^2 + 2y - y^2 \\ &= -9y^3 - 5y^2 = -y^2(9y+5) = 0 \end{aligned}$$

da cui si ha che i due punti di intersezione sono:

$$P_1\colon \begin{cases} y = 0 \\ x = -2y - 1 = -1 \end{cases}, \quad P_2\colon \begin{cases} y = -\frac{5}{9} \\ x = -2y - 1 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{C} \cap r = \left\{ P_1 = (-1, 0), P_2 = \left(\frac{1}{9}, -\frac{5}{9}\right) \right\}.$$

Verifichiamo se in uno di questi punti la retta è tangente. Calcoliamo il gradiente del polinomio f che definisce $\mathcal{C}$ nei punti P_1 e P_2:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (3x^2 + 2x - 2y, -3y^2 - 2x - 2y) \\ \nabla f(P_1) &= (1, 2) \\ \nabla f(P_2) &= \left(\frac{1}{27} + \frac{2}{9} + \frac{10}{9}, -\frac{25}{27} - \frac{2}{9} + \frac{10}{9}\right) \\ &= \left(\frac{37}{27}, -\frac{1}{27}\right). \end{aligned}$$

Infine, le tangenti a $\mathcal{C}$ nei punti P_1 e P_2, che denotiamo con il simbolo τ_1 e τ_2 rispettivamente, sono:

$$\begin{aligned}
\tau_1: &\qquad 1 \cdot (x - (-1)) + 2 \cdot (y - 0) = x + 2y + 1 = 0 \\
\tau_2: &\qquad 37 \cdot \left(x - \frac{1}{9}\right) - 1 \cdot \left(y + \frac{5}{9}\right) = 37x - y - \frac{14}{3} = 0
\end{aligned}$$

Segue che $\tau_1 = r$, quindi r è tangente a $\mathcal{C}$ in P_1.