Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

21 Gennaio 2018
Appello di Gennaio

Il tempo per la prova è di 3 ore. Durante la prova non è permesso l'uso di appunti e libri.

Esercizio 1
Siano V e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ definiti come segue:

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{cases} 3x + 6y + 4z - t = 0 \\ x + 2y - z + 2t = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

(i) Calcolare la dimensione ed una base per i sottospazi W, $V + W$ e $V \cap W$.

Siano $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ due endomorfismi tali che $\mathrm{Im}(f) = V$ e $\mathrm{Ker}(g) = W$.

(ii) Calcolare la nullità della funzione $g \circ f$ e verificare che esiste un autovalore di molteplicità algebrica almeno 3.

Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e sia

$$M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto tale base. Sia g tale che

$$g(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad g(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare la dimensione ed una base per $\mathrm{Ker}(f \circ g)$ e $\mathrm{Im}(f \circ g)$. Trovare, inoltre, gli autovalori e gli autovettori di $M_{\mathcal{E}}(f \circ g)$ e stabilire se è diagonalizzabile.

Esercizio 2
Sia r_k una retta nello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di equazioni parametriche

$$r_k : \begin{cases} x = 1 + kt \\ y = k + t \\ z = -t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

con $k \in \mathbb{R}$. Sia invece s_k la retta in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per $Q = (1, 1, 0)$ di giacitura $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(i) Determinare le posizioni reciproche di r_k e s_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Determinare se esiste un piano π in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tale che π contiene r_k per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(iii) Sia $T = (2, 0, -1)$. Dopo aver verificato che $T \notin r_k$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, si trovino le equazioni del piano τ passante per T e contenente la retta r_1 (con $k = 1$). Si trovino poi le posizioni reciproche tra τ e s_k per ogni $k \in \mathbb{R}$ e trovare eventuali intersezioni.

Esercizio 3
Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con coordinate cartesiane ortonormali (x, y) e centro O. Si consideri la trasformazione σ così definita

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Sia τ la traslazione di vettore $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(i) Dimostrare che σ è una riflessione rispetto a una retta r. Si specifichi un'equazione cartesiana per r e la giacitura di r.

(ii) Si scriva τ in forma matriciale e si dica se $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$.

(iii) Dire che tipo di isometria è $\tau \circ \sigma$ e determinarne gli eventuali punti fissi.

Esercizio 4
Si consideri il piano complesso $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ con coordinate (x, y) e si la curva

$$\mathcal{C}: \ f(x, y) = -y^4 + x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$$

(i) Si ricavino i punti singolari della curva e della sua chiusura proiettiva.

(ii) Per ogni punto singolare P si ricavi la molteplicità del punto per la curva, le tangenti principali, la molteplicità con cui esse tagliano la curva e gli eventuali altri punti di intersezione tra le tangenti e la curva.

(iii) Si calcolino, tramite il metodo del risultante, le intersezioni tra $\mathcal{C}$ e la conica di equazione $\mathcal{D} : x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Esame scritto di Geometria II

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

Appello di Gennaio 2019

Esercizio 5
Sia $I := [0,1)$ e si consideri lo spazio topologico $X = (I, \tau)$ dove τ è la topologia generata dalla seguente collezione di sottoinsiemi di I:

$$\{(0,\delta) \mid \delta \in (0,1]\}.$$

Si consideri il sottospazio $Y = (\{0\} \cup (1/2, 1), \tau_Y)$ con τ_Y topologia indotta da quella su X.

(i) Dimostrare che X è connesso e T_0.

(ii) X è T_1? X è compatto? X è connesso per archi? X è uno spazio di Hausdorff?

(iii) Calcolare la chiusura di $\{0\}$ e di $\{3/4\}$ in Y.

(iv) Esibire, se possibile, un arco continuo in Y che collega 0 a 3/4.

Esercizio 6
Si consideri il piano complesso $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ con coordinate (x, y) e si la curva

$$\mathcal{C}: \ f(x,y) = -y^4 + x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$$

(i) Si ricavino i punti singolari della curva e della sua chiusura proiettiva.

(ii) Per ogni punto singolare P si ricavi la molteplicità del punto per la curva, le tangenti principali, la molteplicità con cui esse tagliano la curva e gli eventuali altri punti di intersezione tra le tangenti e la curva.

(iii) Si calcolino, tramite il metodo del risultante, le intersezioni tra $\mathcal{C}$ e la conica di equazione $\mathcal{D} : x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Soluzione dell'esercizio 1 (i) Per trovare dimensione e base per W, troviamo una soluzione del sistema lineare descritto nella definizione di W, attraverso l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi un sistema equivalente è

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

perciò $\dim(W) = 2$ ed una sua base è $W = \left\langle w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Per trovare una base per $V + W$, prendiamo tutti i vettori delle basi di V e W e riduciamoli attraverso l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\dim(V+W) = 3$ e $V+W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Infine, per la formula di Grassman sappiamo che $\dim(V \cap W) = 1$ e per trovare una base, prendiamo un generico vettore v di V, dato dalla combinazione lineare dei due vettori della base, $v = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -a + 2b \\ b \end{pmatrix} \in V$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo adesso la condizione per cui questo generico vettore di V appartenga a W, soddisfando le sue equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} a - 2b - a + 2b = 0 \\ -a + 2b + b = 0 \end{cases} \rightsquigarrow a = b.$$

Quindi $V \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(ii) La funzione $g \circ f : \mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^4$ ha come immagine $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(\bar{g})$, dove $\bar{g} : \mathrm{Im}(f) = V \to \mathbb{R}^4$ è la restrizione di g a V. Sappiamo che $\mathrm{Ker}(g) = W$, allora sappiamo esiste $v \neq 0 \in V \cap W$ tale che $g \circ f(v) = 0$, allora $\dim(\mathrm{Ker}(\bar{g})) = 1$ e per il teorema di nullità più rango:

$$\dim(\mathrm{Ker}(\bar{g})) + \dim(\mathrm{Im}(\bar{g})) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) = 2,$$

quindi $\dim(\mathrm{Im}(\bar{g})) = \dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) = 1$. Possiamo quindi riutilizzare il teorema nullità più rango ed otteniamo che

$$\dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4,$$

allora $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = 3$. Quindi 0 è un autovalore di molteplicità geometrica 3 e quindi la sua relativa molteplicità algebrica è 3 o 4.

(iii) Se consideriamo l'insieme $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, e_1, e_4\}$, esso forma una base per $\mathbb{R}^4$, infatti:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Quindi possiamo scrivere la matrice che rappresenta g come

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo adesso il cambiamento di base dalla base $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^4}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo il cambiamento di base inverso, considerando la sua inversa:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^4}) = (M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^4})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi scrivere la matrice di g relativa alla base canonica come:

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^4}) = M_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Adesso possiamo finalmente scrivere la matrice relativa alla funzione composta $f \circ g$, come

$$M_{\mathcal{E}}(f \circ g) = M_{\mathcal{E}}(f) M_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo adesso il nucleo attraverso l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi $\text{Ker}(f \circ g) = W$. Per quanto riguarda l'immagine di $f \circ g$, possiamo notare che la prima e la terza colonna della sua matrice generano le altre due, allora $\text{Im}(f \circ g) = V$. Calcoliamo adesso il polinomio caratteristico, dato da

$$|M_{\mathcal{E}}(f \circ g) - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4.$$

Quindi abbiamo un solo autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 4 e molteplicità geometrica 2, dato che il suo autospazio relativo è $\text{Ker}(f \circ g) = W$. Ciò implica che la matrice non è diagonalizzabile.

Soluzione dell'esercizio 2 (i) Dalle equazioni parametriche di r_k, sappiamo che la sua giacitura è $\langle v_k \rangle$ con $v_k = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vogliamo controllare se i due vettori delle giaciture di r_k e s_k possono essere proporionali, calcolandone il rango:

$$r\begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & -k & 1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \forall k \in \mathbb{R},$$

perché il minore $\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$ ha come determinante $-k^2 - 1$, che è sempre diverso da 0 in $\mathbb{R}$. Quindi le due rette non sono mai parallele. Adesso calcoliamo le intersezioni tra le due rette, scrivendo le equazioni parametriche per s_k:

$$s_k : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - kt \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Possiamo quindi uguagliare le relazioni tra le coordinate parametriche e ottenere

$$\begin{cases} 1 + kt = 1 + t' \\ k + t = 1 - kt' \\ -t = t' \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} kt = -t \\ k + t = 1 + kt \\ -t = t' \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} (k+1)t = 0 \\ k - 1 = (k-1)t \\ -t = t' \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzioni per $k = 1$ e $t = t' = 0$ oppure per $k = -1$, $t = 1$ e $t' = -1$. In tutti gli altri casi non esistono intersezioni. Quindi la posizione reciproca delle due rette al variare di k è la seguente:

$$r_k \text{ e } s_k \text{ sono } \begin{cases} \text{incidenti in un punto} & \text{se } k = \pm 1 \\ \text{sghembe} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(ii) Consideriamo le rette r_0 e r_1 e calcoliamo la loro posizione reciproca. Per quanto riguarda le giaciture sono rispettivamente $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, che non sono ovviamente proporzionali. Calcoliamo quindi le loro intersezioni, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 1 = 1 + t' \\ t = 1 + t' \\ -t = -t' \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t' = 0 \\ 0 = 1 \\ t = t' \end{cases}$$

che ovviamente non ha soluzioni. Quindi le due rette non sono proporzionali e non hanno intersezioni, per cui sono sghembe e non esiste un piano che le contenga entrambe.

(iii) Verifichiamo che T non appartenga a nessuna r_k vedendo che non è compatibile il sistema venutosi a creare:

$$\begin{cases} 2 = 1 + kt \\ 0 = k + t \\ -1 = -t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t = 1 \\ k + 1 = 0 \\ k + 1 = 2 \end{cases}$$

Quindi $T \notin r_k \, \forall k \in \mathbb{R}$. Consideriamo il punto $P(1, 1, 0) \in r_1$ e prendiamo il vettore $\vec{TP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, che sappiamo già essere indipendente da v_1. Allora le equazioni cartesiane di τ sono date dalle condizioni

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y & z + 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè $\tau : x + z - 1 = 0$. Esplicitando da questa le equazioni parametriche otteniamo:

$$\tau : \begin{cases} x = 1 - v \\ y = u \\ z = v, \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Per trovare le intersezioni tra τ e s_k, sostituiamo le equazioni parametriche della retta in quelle del piano, ottenendo

$$1 + t + t - 1 = 2t = 0 \Rightarrow t = 0.$$

Quindi il punto $Q \in s_k \cap \tau$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ e allora sono sempre incidenti in un punto.

Soluzione dell'esercizio 3 (i) Innanzitutto, si noti che è anche possibile scrivere la funzione σ come

$$\sigma(x, y) = \left(\frac{1}{13}(5x + 12y + 6), \frac{1}{13}(12x - 5y - 9) \right).$$

Indichiamo ora con A la matrice

$$A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

e con $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ il vettore

$$w = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Affinché σ rappresenti una riflessione, per il teorema di Chasles, è necessario che sia un'isometria indiretta con una retta di punti fissi (la retta di riflessione). Per verificare che σ è un'isometria indiretta, basta controllare che la matrice A sia una matrice ortogonale e che abbia determinante -1, cioè che $A \in O(2) \setminus SO(2)$. Calcoliamo quindi:

$${}^tA \cdot A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{169} \begin{pmatrix} 169 & 0 \\ 0 & 169 \end{pmatrix} = I_2.$$

Allora A è una matrice ortogonale e si vede facilmente che $\det(A) = -1$, allora σ è un'isometria indiretta. Per calcolare la retta di punti fissi basta risolvere le equazioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix},$$

che corrispondono al sistema

$$\begin{cases} x = \frac{1}{13}(5x + 12y + 6) \\ y = \frac{1}{13}(12x - 5y - 9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x = 5x + 12y + 6 \\ 13y = 12x - 5y - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 12y - 6 = 0 \\ -12x + 18y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 6y - 3 = 0 \\ -4x + 6y + 3 = 0. \end{cases}$$

Abbiamo mostrato che vi è una retta r di punti fissi data dall'equazione cartesiana $4x - 6y - 3 = 0$, che ha giacitura $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, e pertanto σ è la riflessione rispetto alla retta r.

(ii) La scrittura matriciale di τ è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza $\tau \circ \sigma$ è descritta da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{cases} \frac{1}{13}(5x + 12y + 6) + 6 \\ \frac{1}{13}(12x - 5y - 9) + 4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{13}(5x + 12y + 84) \\ \frac{1}{13}(12x - 5y + 43) . \end{cases} \end{aligned}$$

mentre $\sigma \circ \tau$ è tale che

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{cases} \frac{1}{13}(5(x+6) + 12(y+4) + 6) \\ \frac{1}{13}(12(x+6) - 5(y+4) - 9) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{13}(5x + 30 + 12y + 48 + 6) \\ \frac{1}{13}(12x + 72 - 5y - 20 - 9) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{13}(5x + 12y + 84) \\ \frac{1}{13}(12x - 5y + 43) . \end{cases} \end{aligned}$$

Ciò dimostra che $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

(iii) Per classificare $\tau \circ \sigma$, osserviamo che la matrice dell'affinità associata è sempre la matrice A. Di conseguenza, $\tau \circ \sigma$ è un'isometria indiretta. Quindi se abbiamo una retta di punti fissi corrisponderà ad una riflessione, mentre se non ci sono punti fissi avremo una glissoriflessione. I punti fissi sono dati dal sistema:

$$\begin{cases} 13x = 5x + 12y + 84 \\ 13y = 12x - 5y + 43 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 12y - 84 = 0 \\ -12x + 18y - 43 = 0, \end{cases} .$$

Si vede facilmente che le due equazioni non sono proporzionali, quindi l'isometria non possiede punti fissi e $\tau \circ \sigma$ corrisponde ad una glissoriflessione.

Soluzione dell'esercizio 4

Calcoliamo le derivate di f per cercare i punti singolari affini

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1) = 2x(2x - 1)(x - 1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$$

per cui abbiamo come possibili punti singolari $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ e $P_3 = (\frac{1}{2}, 0)$ ma quest'ultimo non è un punto della curva. La molteplicità di $\mathcal{C}$ nell'origine è 2 e l'unica tangente principale è $x = 0$ che ha molteplicità d'intersezione con la curva in $\mathcal{O}$ pari 4 a visto che $f(0, t) = t^4$ (chiaramente non ci possono essere altre intersezioni tra tale retta e la curva in virtù del teorema di Bézout). Caloliamo invece la molteplicità in $\mathcal{O}$ della curva definita dal polinomio

$$f(x + 1, y) = x^2(1 + x)^2 - y^4 = x^4 - y^4 + 2x^3 + x^2 = 0$$

è uguale a quella di $\mathcal{C}$ in P_2, per cui la singolarità si tratta di un punto doppio con tangente principale $x - 1 = 0$ (con molteplicità in P_2 pari a 4). Calcoliamo ora i punti all'infinito di $\mathcal{C}$, partiamo omogeneizzando l'equazione per trovare quella di $\bar{\mathcal{C}}$

$$\bar{\mathcal{C}}_a : F(x_0, x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4 - 2x_0x_1^3 + x_0^2x_1^2 = 0$$

da cui ricaviamo che la curva ha come punti all'infinito $Q_1^\infty = [0,1,0]$, $Q_2^\infty = [0,-1,0]$, $Q_3^\infty = [0,i,0]$ e $Q_4^\infty = [0,-i,0]$. Visto che la retta $x_0 = 0$ ha 4 intersezioni con la curva tutti i punti all'infinito saranno lisci (altrimenti andremmo a contraddire il teorema di Bézout). Per calcolare le intersezioni tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ andiamo a calcolare il risultante delle due curve rispetto alla variabile x

$$Res_x(f,g) = 4y^6 - 3y^4 = 4y^4 \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

da cui otteniamo quindi che le intersezioni tra le due curve saranno date dai punti $R_1 = (1,0)$, $R_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ed $R_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Soluzione dell'esercizio 5

La topologia τ è composta, oltre che da X e dall'insieme vuoto, di tutti e soli gli insiemi del tipo $(0,\delta)$ con $\delta \in (0,1]$. Questo vuol dire che ogni aperto di X è anche un aperto di (I,τ_e) dove τ_e è la topologia indotta da quella euclidea su I. Siamo quindi di fronte a due topologie confrontabili con quella di X che è più debole. Tra le varie conseguenze di questo fatto, abbiamo che ogni funzione $f : [0,1] \to I$ (stiamo munendo $[0,1]$ della topologia euclidea) che è continua per la topologia euclidea è continua con τ. In particolare, siccome (I,τ_e) è connesso per archi, anche X lo è. Lo stesso vale per la connessione.

Mostriamo che X è T_0. Siano a, b due punti distinti di X. Se $a = 0$ allora ogni intorno di b diverso da X non contiene a. Se entrambi sono diversi da 0 posso assumere $a < b$: l'insieme $(0,(a+b)/2)$ è un aperto in X che contiene a ma non b. Abbiamo mostrato che per ogni coppia di punti esiste un aperto che contiene uno dei due ma non l'altro: questa è la definizione di spazio topologico T_0.

X è compatto infatti se $\{U_j\}_{j\in J}$ è una collezione di aperti di X che copre X allora esiste almeno un $\bar{j} \in J$ tale che $0 \in U_{\bar{j}}$. Ma l'unico aperto di X che contiene 0 è X quindi ogni ricoprimento aperto contiene X. Un sottoricoprimento finito è quindi $\{U_{\bar{j}}\} = \{X\}$.

Mostrare che $P = \{3/4\}$ non è chiuso è semplice infatti il suo complementare non è aperto. Questo basta per concludere che X non è T_1 (e di conseguenza nemmeno di Hausdorff). Siccome gli aperti non banali sono tutti e soli gli insiemi del tipo $(0,\delta)$, i chiusi in X diversi da X e dal vuoto sono del tipo

$$\{0\} \cup [\delta, 1)$$

con $\delta \in (0,1]$ e $\{0\}$. I chiusi di Y sono della stessa forma con $\delta \in (1/2,1]$. Di conseguenza la chiusura di P in Y è $\overline{P} = \{0\} \cup [3/4,1)$.

Il punto $Q = \{0\}$ è chiuso in X infatti il suo complementare è $(0,1)$ che è un aperto. Di conseguenza Q è anche un chiuso in Y infatti $Q = Q \cap Y$ (tutti i chiusi di Y sono di questo tipo).

Si consideri l'arco $f : [0,1] \to Y$ tale che $f(0) = 0$ e $f(t) = 1/2 + t/4$ (si ha quindi $f(1) = 3/4$). Mostriamo che f è un arco continuo in Y. Definiamo, per comodità, $U_\delta = (1/2,\delta)$ con $\delta \in (1/2,1]$ e $U_0 = Y$. Questi sono tutti e soli gli aperti non vuoti di Y. Si ha

$$f^{-1}(U_\delta) = \begin{cases} \text{se } \delta = 0 & f^{-1}(Y) = [0,1] \\ \text{se } \delta < 3/4 & (0, 4\delta - 2) \\ \text{se } \delta \geq 3/4 & (0,1] \end{cases}$$

quindi la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di $[0,1]$ con la topologia indotta da quella euclidea: f è un arco continuo in Y che collega 0 e 3/4.

Soluzione dell'esercizio 6

Si veda la soluzione dell'Esercizio 4.