Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2023/2024
Gennaio 2025

Esercizio 1. Sia $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ il piano proiettivo reale. Si considerino i seguenti punti in $\mathbb{P}^2$:

$$P_1 = [1,0,1], \qquad P_2 = [2,1,0], \qquad P_3 = [0,1,2], \qquad P_4 = [0,1,0],$$
$$Q_1 = [1,1,2], \qquad Q_2 = [1,-1,-1], \qquad Q_3 = [0,2,-1], \qquad Q_4 = [0,2,1].$$

(1) Si dimostri che $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ sono in posizione generale;

(2) Si costruisca una proiettività $f\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$;

(3) Si trovino i punti fissi di f, ossia i punti $P \in \mathbb{P}^2$ tali che $f(P) = P$;

(4) Si trovino le rette fissate da f, ossia le rette $r \subset \mathbb{P}^2$ tali che $f(r) = r$;

(5) Si dica se esiste una proiettività $g\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tale che $g(P_i) = Q_{i+1}$ per ogni $i = 1, 2, 3$ e $g(P_4) = [0, 0, 1]$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ il piano affine reale con coordinate (x, y). Si consideri la seguente famiglia di curve in $\mathbb{A}^2$:

$$\Gamma_k\colon \qquad f_k(x,y) = y^{k+1} + x^3 - xy^2 = 0$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$.
Sia $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ il piano proiettivo reale con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si identifichi $\mathbb{A}^2 \cong \{x_0 \neq 0\}$ e si denoti con $\overline{\Gamma_k} \subset \mathbb{P}^2$ la chiusura proiettiva di Γ_k.

(1) Dimostrare che Γ_k è singolare per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$;

(2) Dimostrare che Γ_3 ha un unico punto singolare P e trovare le tangenti principali a Γ_3 in P;

(3) Dimostrare che $\overline{\Gamma_1}$ ha un unico punto singolare e trovare i suoi punti di flesso;

(4) Dimostrare che Γ_2 contiene una retta.

Esercizio 1. (1) Si noti che:

$$2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Pertanto, definendo:

$$p_1 = -2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \; p_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \; p_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \; p_4 = 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

abbiamo che $P_i = [p_i]$ per ogni $i = 1,2,3,4$ e $P_4 = [p_1 + p_2 + p_3]$. Segue che i punti $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ sono in posizione generale. Allo stesso modo, si ha che:

$$2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Pertanto, definendo:

$$q_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \; q_2 = -\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \; q_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \; q_4 = 2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},$$

abbiamo che $Q_i = [q_i]$ per ogni $i = 1,2,3,4$ e $Q_4 = [q_1 + q_2 + q_3]$. Segue che i punti $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ sono in posizione generale.
I coefficienti per definire i p_i sono determinati risolvendo il sistema lineare omogeneo:

$$\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

I coefficienti per definire i q_i sono determinati analogamente.

(2) Segue dal punto precedente che una tale trasformazione esiste ed è unica. Essa si ottiene usando il teorema della determinazione di una applicazione lineare rispetto a una base. Sia $\overline{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un isomorfismo associato ad f e sia A la sua matrice associata rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

Usando i calcoli del punto precedente, è sufficiente imporre che:

$$A\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \; A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \; A\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},$$

ossia:

$$-2c_1 - 2c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; 2c_1 + c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c_2 + 2c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sommando le tre equazioni si ottiene:

$$2c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dalla seconda e dalla terza equazione segue che:

$$c_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In conclusione:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene che:

$$\begin{aligned} f([x_0, x_1, x_2]) &= \left[A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[-\frac{1}{2}x_0, -\frac{1}{2}x_0 + 2x_1, x_1 - x_2 \right] \\ &= [x_0, x_0 - 4x_1, -2x_1 + 2x_2]. \end{aligned}$$

(3) I punti fissi di f sono le classi degli autovettori di A. Infatti, un punto $P = [p]$ per qualche $p \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ è fisso per f se e solo se:

$$f(P) = P \iff [Ap] = [p] \iff Ap = \lambda p, \; \lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \iff p \text{ autovettore di } A.$$

Dunque, per trovare gli autovettori di A, dobbiamo prima trovare gli autovalori di A. Essi sono gli zeri del polinomio caratteristico:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)(2 - \lambda)(1 + \lambda).$$

Segue che gli autovalori di A sono $-1, -\frac{1}{2}$ e 2.
Per trovare gli autovettori con autovalore -1, risolviamo il sistema lineare:

$$(A + I_3) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{cases} \frac{x_0}{2} = 0 \\ -\frac{x_0}{2} + 3x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases},$$

da cui si ottiene che gli autovettori sono della forma $(0,0,\lambda)^T$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pertanto, il primo punto fisso è $S_1 = [0,0,1]$.
Per trovare gli autovettori con autovalore $-\frac{1}{2}$, risolviamo il sistema lineare:

$$\left(A + \frac{1}{2} I_3\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ -\frac{x_0}{2} + \frac{5}{2}x_1 = 0 \\ x_1 - \frac{x_2}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = 5x_1 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

da cui si ottiene che gli autovettori sono della forma $(5\lambda, \lambda, 2\lambda)^T$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pertanto, il secondo punto fisso è $S_2 = [5,1,2]$.
Per trovare gli autovettori con autovalore 2, risolviamo il sistema lineare:

$$(A - 2I_3) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\frac{5}{2}x_0 = 0 \\ -\frac{x_0}{2} = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene che gli autovettori sono della forma $(0, 3\lambda, \lambda)^T$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pertanto, il terzo punto fisso è $S_3 = [0,3,1]$.

(4) Le rette fissate sono le rette passanti per coppie di punti fissati, ossia:

- la retta r_1 passante per S_1 e S_2 di equazione:

$$r_1\colon \qquad \det \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 5 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -x_0 + 5x_1 = 0$$

- la retta r_2 passante per S_1 e S_3 di equazione:

$$r_2\colon \qquad \det \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 3 \\ x_2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -x_0 = 0$$

- la retta r_3 passante per S_2 e S_3 di equazione:

$$r_3\colon \qquad \det \begin{pmatrix} x_0 & 5 & 0 \\ x_1 & 1 & 3 \\ x_2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -5(x_0 + x_1 - 3x_2) = 0.$$

(5) Una tale trasformazione non esiste. Infatti, i punti $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ sono in posizione generale, mentre i punti $\{Q_2, Q_3, Q_4, [0,0,1]\}$ non sono in posizione generale, in quanto i punti $\{Q_3, Q_4, [0,0,1]\}$ sono allineati (giacciono sulla retta all'infinito $x_0 = 0$).

Esercizio 2. (1) Per dimostrare che Γ_k è singolare, calcoliamo il gradiente del polinomio f_k che ne definisce l'equazione:

$$\nabla f_k(x,y) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x}, \frac{\partial f_k}{\partial y}\right) = (3x^2 - y^2, (k+1)y^k - 2xy)$$

I punti singolari di Γ_k sono i punti $P = (x, y)$ che soddisfano il sistema non-lineare:

$$\begin{cases} y^{k+1} + x^3 - xy^2 = 0 \\ 3x^2 - y^2 = 0 \\ (k+1)y^k - 2xy = 0 \end{cases}.$$

Poiché $k \geq 1$, $y^k = y^{k+1} = 0$ se $y = 0$. Da ciò segue che $P = (0, 0)$ è soluzione del sistema, ossia $(0, 0)$ è un punto singolare di Γ_k per ogni $k \geq 1$. Alternativamente, si può osservare che, per $k \geq 1$, il termine omogeneo di grado più basso del polinomio f_k ha sempre grado maggiore o uguale a 2. Questo implica che l'origine $(0, 0)$ ha sempre molteplicità maggiore o uguale a 2, ovvero è singolare, per ogni $k \geq 1$. In particolare, se $k = 1$ l'origine ha molteplicità 2, mentre per $k \geq 2$ l'origine ha molteplicità 3.

(2) Come osservato già in precedenza, il punto $P = (0, 0)$ è un punto singolare di ordine 3. In questo caso, Γ_3 è una curva di grado 4. Questo implica che la curva proiettiva $\overline{\Gamma_3}$ di grado 4 ha un punto singolare $[1, 0, 0]$ di grado 3. Dal teorema di Bézout (si veda l'Esercizio 2 della provetta 2023/24) segue che $[1, 0, 0]$ è l'unico punto singolare di $\overline{\Gamma_3}$. Segue che $P = (0, 0)$ è l'unico punto singolare di Γ_3. Infatti, se esistesse un altro punto singolare affine $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$, allora il punto proiettivo $[1, x_1, y_1]$ sarebbe singolare per $\overline{\Gamma_3}$.
Alternativamente, è possibile verificare che $P = (0, 0)$ è l'unico punto singolare risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y^4 + x^3 - xy^2 = 0 \\ 3x^2 - y^2 = 0 \\ 4y^3 - 2xy = 2y(2y^2 - x) = 0 \end{cases}.$$

Dalla terza equazione segue che $y = 0$ o $2y^2 - x = 0$. Tuttavia, se $y = 0$, dalla seconda equazione segue che $x = 0$, e $(x, y) = (0, 0)$ soddisfa la prima equazione. Se invece $x = 2y^2$ e $y \neq 0$, dalla seconda equazione si ottiene $12y^4 - y^2 = y^2(12y^2 - 1) = 0$, ossia $y^2 = 1/12$ e $x = 2y^2 = 1/6$. Tuttavia, sostituendo questi parametri nella prima equazione, si ottiene:

$$\frac{1}{144} + \frac{1}{216} - \frac{1}{72} = \frac{3 + 2 - 6}{432} = -\frac{1}{432} \neq 0.$$

Infine, l'unica soluzione del sistema è $P = (0, 0)$. Le tangenti principali si ottengono scomponendo in fattori lineari il temine omogeneo di grado più basso di f_3, ossia:

$$x^3 - xy^2 = x(x^2 - y^2) = x(x - y)(x + y).$$

Le tangenti principali a Γ_3 in $P = (0, 0)$ sono, dunque:

$$\begin{aligned} \tau_1: &\quad x = 0 \\ \tau_2: &\quad x - y = 0 \\ \tau_3: &\quad x + y = 0 \end{aligned}$$

(3) Come già notato nel punto (1), l'origine $(0,0)$ è un punto singolare di Γ_1 di molteplicità 2. Ciò implica che la cubica proiettiva $\overline{\Gamma_1}$ ha un punto singolare $[1,0,0]$ di molteplicità 2. Esattamente come nel punto precedente, si conclude che $[1,0,0]$ è l'unico punto singolare. Alternativamente, consideriamo il polinomio omogeneo F_1 che definisce $\overline{\Gamma_1}$:

$$\overline{\Gamma_1}: \qquad F_1(x_0,x_1,x_2) = x_0x_2^2 + x_1^3 - x_1x_2^2 = 0.$$

Calcoliamone il gradiente:

$$\nabla F_1(x_0,x_1,x_2) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_0}, \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) = (x_2^2, 3x_1^2 - x_2^2, 2x_0x_2 - 2x_1x_2).$$

I punti singolari $P' = [x_0,x_1,x_2]$ sono i punti che soddisfano il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x_0x_2^2 + x_1^3 - x_1x_2^2 = 0 \\ x_2^2 = 0 \\ 3x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 2x_0x_2 - 2x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione segue che $x_2 = 0$, mentre dalla terza equazione segue che $x_1 = 0$. Il punto $[1,0,0]$ soddisfa anche la prima e la quarta equazione, ed è pertanto l'unica soluzione. Per trovare i punti di flesso, calcoliamo il determinante Hessiano. Sia $G = F_1$ e $G_{ij} = \partial^2 G/\partial x_i \partial x_j$. Calcoliamo le derivate seconde:

$$\begin{aligned} &G_{00} = 0, && G_{01} = 0, && G_{02} = 2x_2 \\ &G_{10} = G_{01} = 0, && G_{11} = 6x_1, && G_{12} = -2x_2 \\ &G_{20} = G_{02} = 2x_2, && G_{21} = G_{12} = -2x_2, && G_{22} = 2x_0 - 2x_1. \end{aligned}$$

Pertanto, il determinante Hessiano $\mathscr{H}_G$ è dato da:

$$\mathscr{H}_G(x_0,x_1,x_2) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x_2 \\ 0 & 6x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & -2x_2 & 2x_0 - 2x_1 \end{pmatrix} = -24x_1x_2^2.$$

I punti di flesso di $\overline{\Gamma_1}$ sono i punti $P' = [x_0,x_1,x_2]$ sulla curva $\overline{\Gamma_1}$ non-singolari che annullano il determinante Hessiano, ossia soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} x_0x_2^2 + x_1^3 - x_1x_2^2 = 0 \\ 24x_1x_2^2 = 0 \\ [x_0,x_1,x_2] \neq [1,0,0] \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione si ricava che $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$. Se $x_1 = 0$, allora dalla prima equazione $x_0 = 0$ o $x_2 = 0$. La prima scelta ci dà il punto $P' = [0,0,1]$, mentre la seconda scelta ci dà il punto $[1,0,0]$, che non è ammissibile per la terza equazione (è un punto singolare). Se $x_2 = 0$, dalla prima equazione segue che $x_1 = 0$, da cui otteniamo il punto $[1,0,0]$ che non è soluzione. Concludiamo che la curva $\overline{\Gamma_1}$ ha un unico punto di flesso, $P' = [0,0,1]$.

(4) La curva affine Γ_2 ha grado 3 ed è espressa da un polinomio f_2 omogeneo di grado 3. Possiamo scomporre:

$$f_2(x,y) = y^3 + x^3 - xy^2$$

in fattori lineari usando il seguente metodo: scriviamo

$$\frac{f_2(x,y)}{y^3} = 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right).$$

Poniamo poi $t = \frac{x}{y}$, ottenendo il polinomio:

$$g(t) = 1 + t^3 - t^2.$$

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ le radici del polinomio g, ossia $g(t) = (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\alpha_3)$. Da questo segue che:

$$\frac{f_2(x,y)}{y^3} = \left(\left(\frac{x}{y}\right) - \alpha_1\right)\left(\left(\frac{x}{y}\right) - \alpha_2\right)\left(\left(\frac{x}{y}\right) - \alpha_3\right),$$

da cui si ottiene che:

$$f_2(x,y) = (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)(x - \alpha_3 y).$$

Ora, poiché il polinomio $g(t)$ ha grado 3, esso ha almeno una radice reale. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Dalla fattorizzazione del polinomio f_2, si ottiene che la retta:

$$L\colon \qquad x - \alpha_1 y = 0$$

è contenuta in Γ_2. In particolare, poiché in questo caso $\alpha_2, \alpha_3 \notin \mathbb{R}$, si ha che $L = \Gamma_2$.