Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA A

Esercizio 1. Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e la proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1,2,-1]) = [2,-3,2] \qquad f([0,1,-2]) = [0,1,3]$$
$$f([-1,2,3]) = [2,1,4] \qquad f([1,-3,4]) = [1,-2,-3]$$

(i) Si determini una matrice associata alla proiettività f rispetto al riferimento proiettivo canonico di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

(ii) Si determinino i punti fissati, le rette fissate puntualmente e le rette invarianti rispetto alla proiettività f.

(iii) Si classifichi la conica proiettiva $\mathcal{Q}_k$ definita dall'equazione in coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$

$$F(x_0, x_1, x_2) = kx_0^2 + x_1^2 + kx_0x_1 - x_1x_2 = 0$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$, scrivendo l'equazione della conica proiettivamente equivalente a $\mathcal{Q}_k$ avente equazione canonica. Detta r la retta proiettiva passante per i due punti fissati da f, si determini per quale valore di k la conica $\mathcal{Q}_k$ ha r come tangente principale.

Svolgimento Esercizio 1.

(i) Per trovare una matrice associata alla proiettività f determiniamo prima un isomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato ad f (cioè un isomorfismo per cui $[T(v)] = f([v])$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$).

Cerchiamo una soluzione non banale $a, b, c, k \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$a(1,2,-1) + b(0,1,-2) + c(-1,2,3) = k(1,-3,4).$$

Una soluzione non banale è data da $(a,b,c,k) = (1,-6,-1,2)$. Le immagini dei vettori dovranno quindi soddisfare la medesima relazione di lineare dipendenza. Cerchiamo perciò una soluzione non banale di

$$(2a', -3a', 2a') - 6(0, b', 3b') - (2c', c', 4c') = 2(k', -2k', -3k').$$

Una soluzione non banale è data da $(a', b', c', k') = (1,1,-1,2)$.

Pertanto un isomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato a f è definito da

$$T(1,2,-1) = (2,-3,2) \quad T(0,1,-2) = (0,1,3) \quad T(-1,2,3) = (-2,-1,-4).$$

La matrice di T rispetto alla base canonica darà quindi una matrice per f rispetto al riferimento proiettivo canonico.

$$M_{e,e}(T) = M_{e,b'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) M_{b',b}(T) M_{b,e}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = M_{e,b'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(M_{e,b}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}))^{-1},$$

dove

$$b := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \qquad b' := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Avremo

$$M_{e,b'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$M_{b,e}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = M_{e,b}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -8 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi

$$M_{e,e}(T) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -8 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ -26 & -6 & -8 \\ 2 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

Essendo la matrice associata alla proiettività definita a meno di una costante moltiplicativa, possiamo concludere che una matrice associata alla proiettività f è

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -13 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

(ii) Determiniamo i punti fissati da f calcolando gli autospazi dell'isomorfismo di $\mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice A.

$$\det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} 10-t & 0 & 0 \\ -13 & -3-t & -4 \\ 1 & 1 & -7-t \end{pmatrix} = (t+5)^2(10-t),$$

quindi lo spettro di A è $\{-5, 10\}$. Calcoliamo gli autospazi corrispondenti

$$V_{-5} := \ker\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ -13 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \langle\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$$

$$V_{10} := \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -13 & -13 & -4 \\ 1 & 1 & -17 \end{pmatrix} = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$$

I punti fissati dalla proiettività f sono quindi i punti $P\colon [0,2,1]$ e $Q\colon [1,-1,0]$.

Osserviamo che non ci sono rette fissate puntualmente da f; questi infatti corrispondono agli autospazi di dimensione 2 dell'isomorfismo associato alla matrice A. Entrambi gli autovalori hanno però molteplicità geometrica uguale a 1.

Le rette invarianti rispetto alla proiettività f sono due:

- La retta passante dai punti P e Q (corrispondente alla proiettivizzazione del piano generato dai due autospazi trovati precedentemente):

$$r\colon x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$$

- La proiettivizzazione di

$$\ker((A+5I)^2) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle,$$

ossia la retta proiettiva

$$s\colon x_0 = 0.$$

(iii) Le coniche proiettive reali sono classificate in base alla loro segnatura. Studiamo quindi la segnatura della matrice M alla conica $\mathcal{Q}_k$:

$$M := \begin{pmatrix} k & k/2 & 0 \\ k/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo il metodo dei minori principali, partendo dal minore $(m_{2,2})$:

- $\det(1) = 1 > 0 \Rightarrow$ segnatura $(1, 0)$;
- $\det \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow$ segnatura $(1, 1)$;
- $\det M = -k/4$.

Pertanto

$$\mathrm{Sgn}(M) = \begin{cases} (1,2) & k < 0 \\ (1,1) & k = 0 \\ (2,1) & k > 0 \end{cases}$$

Quindi la forma canonica della conica proiettivamente equivalente a $\mathcal{Q}_k$ è

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 & k \neq 0 \\ x_0^2 - x_1^2 = 0 & k = 0 \end{cases}$$

Per determinare il valore di k per cui r è tangente principale per $\mathcal{Q}_k$ calcoliamo dapprima l'intersazione tra le due, operando una sostituzione, e.g. $x_1 = 2x_2 - x_0$.

I punti di intersezione soddisferanno quindi

$$F(x_0, 2x_2 - x_0, x_2) = x_0^2 + (2k - 3)x_0x_2 + 2x_2^2 = 0.$$

Osserviamo che i punti nell'intersezione soddisfano anche $(x_0, x_2) \neq (0, 0)$, quindi affinché r sia tangente principale, dovrà valere

$$0 = \Delta = (2k - 3)^2 - 8,$$

ossia $k = \dfrac{3}{2} \pm \sqrt{2}$. Possiamo anche osservare che per tali valori di k la conica è non degenere, pertanto la retta r non è componente di $\mathcal{Q}_k$.

Esercizio 2. Si consideri nel piano affine $\mathbb{C}^2$ la curva piana $\mathcal{C}$ definita da

$$f(x, y)\colon (x^2 - 1)(x - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = 0$$

(i) Si trovino i punti singolari della curva, si calcolino le tangenti principali alla curva in tali punti e se ne calcolino le molteplicità di intersezione.

(ii) Utilizzando l'omogeneizzazione data da $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$, si consideri la chiusura proiettiva della curva $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e si trovino gli eventuali punti impropri della curva $\mathcal{C}$. Si stabilisca la natura di tali punti, calcolando le tangenti (quelle principali nel caso in cui essi siano singolari) e si determini quali di queste è asintoto per $\mathcal{C}$.

(iii) Sapendo che il polinomio risultante tra $f(x,y)$ e $g(x,y) = x^2+y^2-2$ rispetto alla variabile y è
$$Res(f,g)(x) = (2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x)^2,$$
si calcolino le intersezioni tra la curva $\mathcal{C}$ e la conica di equazione $g(x,y) = 0$.

Svolgimento Esercizio 2.

(i) Osserviamo che
$$f(x,y) = x^4 - 2x^3 + 2x + y^4 - 2y^2$$
quindi per calcolare i punti singolari imponiamo l'annullamento del gradiente:
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 6x^2 + 2 = 2(x-1)^2(2x+1) \\ f_y(x,y) &= 4y^3 - 4y = 4y(y-1)(y+1) \end{aligned}$$
Le soluzioni di $(f_x(x,y), f_y(x,y)) = (0,0)$ sono quindi i punti $(x,y) \in \{-1/2, 1\} \times \{0, 1, -1\}$. Osserviamo che solo i punti $P_1\colon (1,1)$ e $P_2\colon (1,-1)$ appartengono a $\mathcal{C}$, quindi P_1 e P_2 sono gli unici punti singolari cercati.

Osserviamo che la curva è simmetrica rispetto all'asse delle x (l'equazione è invariante rispetto al cambio di coordinate $y \mapsto -y$), quindi ci è sufficiente studiare il punto singolare P_1 e le sue tangenti principali per dedurre quanto accade nel punto P_2.

Per comprendere la natura del punto $P_1\colon (1,1)$, studiamo il punto $(0,0)$ per la curva definita da
$$\begin{aligned} g(x,y) = f(x+1, y+1) &= ((x+1)^2 - 1)(x+1-1)^2 + ((y+1)^2 - 1)^2 \\ &= (x^2 + 2x)x^2 + (y^2 + 2y)^2 \\ &= x^4 + 2x^3 + y^4 + 4y^3 + 4y^2 \end{aligned}$$
Il punto $(0,0)$ è quindi un punto doppio per la curva $\{g(x,y) = 0\}$ e ha come unica tangente principale $y = 0$. Questo significa che $(1,1)$ è un punto doppio per $\mathcal{C}$ e ha come tangente principale $r_1\colon y = 1$.

Calcoliamo $I(r_1, \mathcal{C}; P_1)$. La retta r_1 è parametrizzata da $x = 1+t$, $y = 1$; calcoliamo quindi
$$f(1+t, 1) = ((1+t)^2 - 1)(1+t-1)^2 + (1-1)^2 = t^4 + 2t^3$$
osserviamo che la radice $t = 0$ ha per $f(1+t,1)$ molteplicità di annullamento 3, quindi $I(r_1, \mathcal{C}; P_1) = 3$. Il punto P_1 è quindi una cuspide.

Per quanto visto sopra, anche il punto P_2 è una cuspide, con tangente principale $r_2\colon y = -1$ e $I(r_2, \mathcal{C}; P_2) = 3$.

(ii) Utilizzando l'omogeneizzazione data da $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$, troviamo che la chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ha equazione
$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_0x_1^3 + 2x_0^3x_1 - 2x_0^2x_2^2 = 0$$
I punti impropri quindi sono $Q_k := [0 : 1 : \omega_k]$ con $k = 0,1,2,3$ e $\omega_k := e^{i\pi(1+2k)/4}$.

Per determinare se sono punti lisci o singolari calcoliamo le derivate di F rispetto alle tre variabili:
$$\begin{aligned} F_0(x_0,x_1,x_2) &= -2x_1^3 + 6x_0^2x_1 - 4x_0x_2^2 \\ F_1(x_0,x_1,x_2) &= 4x_1^3 - 6x_0x_1^2 + 2x_0^3 \\ F_2(x_0,x_1,x_2) &= 4x_2^3 - 4x_0^2x_2 \end{aligned}$$

Osserviamo che per $F_0(Q_k) = -2 \neq 0$ per $k = 0, 1, 2, 3$, quindi tutti i punti impropri di $\mathcal{C}$ sono lisci. La retta tangente a $\overline{\mathcal{C}}$ in Q_k è la retta

$$\overline{r}_k \colon -x_0 + 2x_1 + 2\omega_k^3 x_2 = 0$$

Quindi la curva $\mathcal{C}$ ha quattro asintoti:

$$r_k \colon 2x + 2\omega_k^3 y = 1$$

per $k = 0, 1, 2, 3$.

(iii) Le radici del risultante rispetto alla variabile y danno le coordinate x dei punti di intersezione tra le curve cercate; in particolare, essendo

$$Res(f, g)(x) = 4x^2(x-1)^4(x+1)^2,$$

avremo $x \in \{0, 1, -1\}$. I punti di intersezione sono quindi $(0, \pm\sqrt{2})$, $(1, \pm 1)$ e $(-1, \pm 1)$.