Geometria...

Marco Andreatta

Iniziamo con le parole che **Platone** fa dire a **Socrate** nel *Menone*

... A che sto pensando? alle opinioni vere. Anche le opinioni vere, finché restano, sono cose belle, capaci di realizzare tutto il bene possibile; solo che non acconsentono a rimanere per lungo tempo, e fuggono via dall' anima umana, per cui non hanno un gran significato, a meno che non s'incatenino con un ragionamento fondato sulla causalitá. Ma proprio in questo, compagno Menone, consiste l' anamnesi, quella reminescenza su cui sopra abbiamo convenuto.

Se collegate, esse dapprima divengono scienza e, quindi, cognizioni stabili. Ecco perché la scienza vale piú della retta opinione: la differenza tra scienza e retta opinione sta, appunto, nel collegamento.

Platone,
Atene 427-347 a.C.

Quindi, nel rispondere al petulante Menone, Socrate prosegue in questo modo:

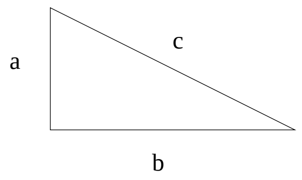
Ma poiché tu, per essere libero, non ti dai cura alcuna di dominar te stesso, e ti prepari anzi a comandare me e comandi, ti asseconderó: non c'é altro da fare! Dobbiamo dunque, sembra, esaminare la "qualitá" di una cosa di cui non sappiamo ancora quello "che" essa sia. Se non altro, addolcisci almeno un poco il tuo dominio su di me, e concedimi di esaminare per ipotesi se la virtú sia insegnabile, o cosa sia.

E quando dico "per ipotesi", intendo "ipotesi" nell'uso che spesso ne fanno gli studiosi di geometria, quando, ad esempio, interrogati a proposito di questa superficie, se essa, in forma di triangolo, possa essere inscritta in un dato cerchio, uno risponderebbe...

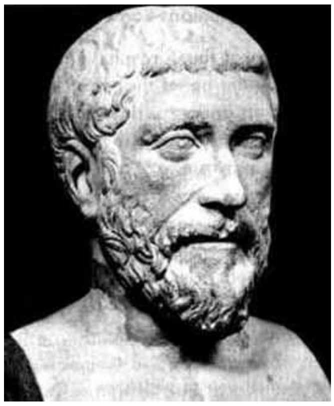
E per capire cosa intende Platone-Socrate quando dice fai come il geometra, prendiamo quello che sicuramente é il piú famoso teorema di geometria, il

Teorema di Pitagora.

Dato un triangolo rettangolo

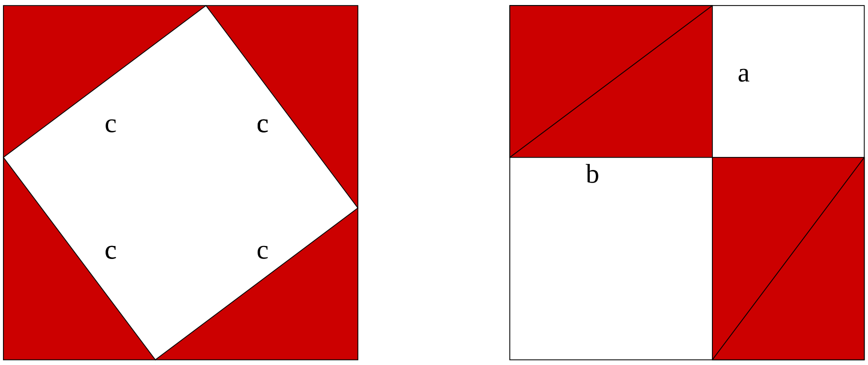


vale l'identitá $a^2 + b^2 = c^2$



Pitagora,
Mileto-Crotone 580-500 a.C.

La figura seguente contiene la
Prova del teorema: prendiamo due quadrati uguali di lati $a + b$. A questi quadrati togliamo quattro triangoli rettangoli uguali a quello in ipotesi ma in due modi diversi, come in figura (triangoli rossi). L' area della parte restante (bianca) é uguale, dunque vale $a^2 + b^2 = c^2$



Euclide scrive una sorta di enciclopedia della Matematica in tredici libri denominati *Elementi*, sei dei quali dedicati alla Geometria, costituita da

Oggetti, definiti a priori, tramite assiomi o postulati, e da un

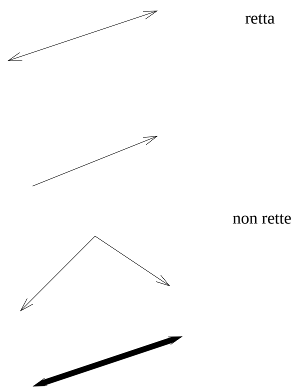
Metodo, logico deduttivo che si basa su quelle che Euclide chiama nozioni comuni.

Euclide
Alessandria 325-265 a.C.

Quali sono gli assiomi necessari per enunciare e dimostrare il teorema di Pitagora?

Certamente gli assiomi di retta (e quindi segmento, angolo,...) che troviamo nel primo dei sei libri: una **retta** é un oggetto a priori caratterizzato dalle seguenti proprietá:
i) Si estende all' infinito in due direzioni
ii) Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti
iii) dati due punti su una retta il cammino piú breve per andare da un punto all'altro é dato dalla retta stessa (la retta é una geodetica)
iv) se togliamo un punto da una retta rimangono due pezzi separati.

Esempi:



- Ma poi assumiamo anche *l'esistenza di un quadrato di lato assegnato.*

- Questa assunzione é equivalente alla seguente: *Data una retta ed un punto esterno ad essa esiste una ed una sola retta passante per quel punto e parallela alla retta di partenza*

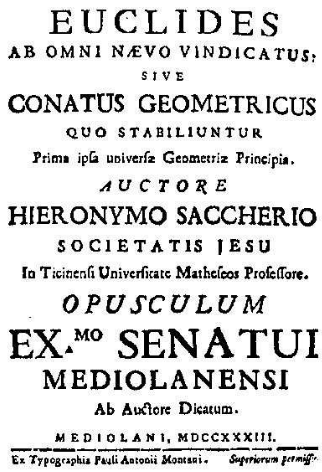
- Si puó anche provare che questa é a sua volta equivalente al *Teorema di Pitagora.*

Il punto é ora il seguente: possiamo dimostrare una qualunque delle tre affermazioni precedenti senza assumerne un'altra e partendo solo dai 4 postulati di retta?

La risposta é no, le tre affermazioni equivalenti vanno postulate e vengono infatti chiamate il quinto postulato d(ella geometria di) Euclide.

Per capire questo ci sono voluti quasi 2.000 anni di matematica, nell' avvicinarci a capire la risposta ecco alcune osservazioni storico-culturali:

Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), gesuita, professore di Teologia e Matematica a Pavia, si propose di dimostrare per contraddizione l'esistenza di un quadrato di lato arbitrario (quadrilatero di Saccheri): di fatto sviluppó i primi esempi di **geometria non euclidea**.



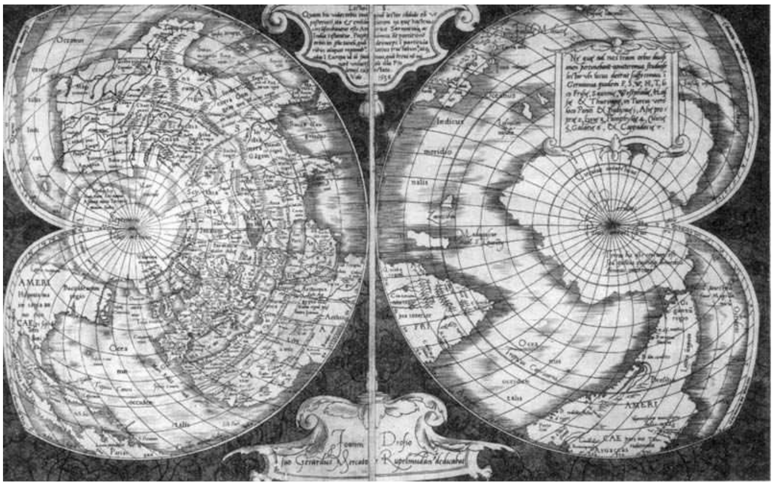
EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

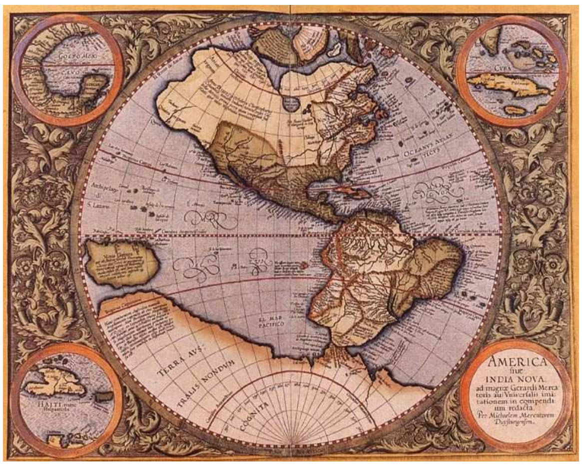
Ci si convince che il mondo é tondo; magari gli scienziati lo sapevano ma diventa importante fare misure, dividere territori, tracciare rotte, su scala terrestre.

Nel 1493 una bolla papale assegna le terre a ovest del *meridiano che sta 100 leghe ad ovest delle Azzorre" alla Spagna*. Nessuno peró sa come determinare questo meridiano.
Si bandiscono dei premi in denaro, il primo dalla Spagna nel 1567.

Gerardo Mercatore (1512-1594), matematico, astronomo, cartografo, eretico si sforza di ridurre la geometria del globo terrestre alla geometria piana.

Proiezioni di Mercatore

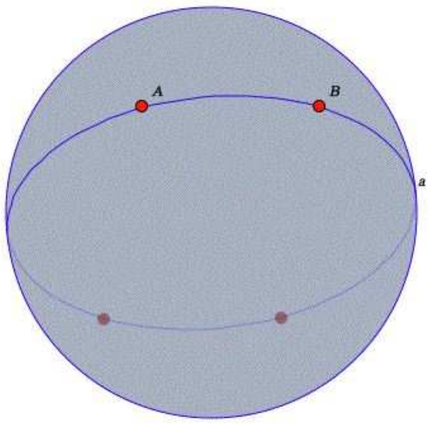




La geometria sferica: una **Sfera** é il luogo dei punti nello spazio equidistanti una lungezza r da un punto fisso detto 0. Pensiamo di poter muoverci solo sulla superficie della sfera e che il raggio r sia enormemente grande rispetto alle nostre dimensioni.

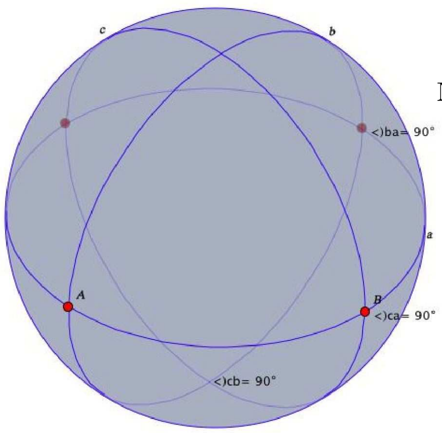
Una **retta** vogliamo sia come prima caratterizzata da:
ii) Si estende all' infinito in due direzioni
ii) Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti
iii) dati due punti su una retta il cammino piú breve per andare da un punto all' altro é dato dalla retta stessa (la retta é una geodetica)
iv) se togliamo un punto da una retta rimangono due pezzi separati.

Le rette sulla sfera sono i **cerchi massimi**, ovvero i cerchi che si ottengono intersecando la sfera con un piano passante per l'origine



Di questo fatto se ne puó dare una **prova** matematica. Per convincersene basta provare a tendere un filo tra due punti su un pallone. Oppure considerare la rotta che percorre un aereo da Milano a New-York, ...

In geometria sferica **non vale** il teorema di Pitagora:



Nella figura la sfera é divisa in otto triangoli rettangoli uguali tra loro (equilateri e con tre angoli retti!!)

In questa geometria per un triangolo rettangolo la somma dei quadrati dei cateti é *piú grande* del quadrato dell'ipotenusa.

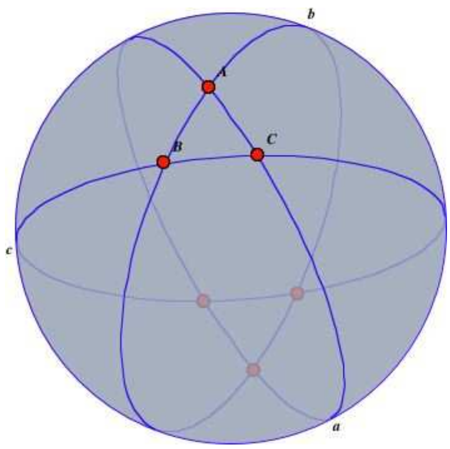
Non esistono quadrati e non esistono parallele

Gauss,
Gottinga, 1777-1855

Teorema dell' eccesso di Gauss.

Dato un triangolo sferico come in figura
con angoli A, B, C la sua area
é data dalla formula

Area $= r^2(A + B + C - \pi)$



Prova Osserviamo che le tre lune definite dagli angoli A,B,C coprono tutta la sfera, precisamente ricoprono tre volte il triangolo ed il triangolo antipodale, ogni altro punto sta solo su una luna.

Abbiamo dunque che vale:
area luna A + area luna B + area luna C = area della sfera + 4 area del triangolo

Ovvero:
$4r^2A + 4r^2B + 4r^2C = 4r^2\pi + 4\ Area$

Osservazioni

- la geometria sferica non e' equivalente (neanche localmente) alla geometria euclidea (**Teorema Egregium**).

- gli angoli determinano il triangolo.
(In geometria euclidea due triangoli con gli stessi angoli non sono necessariamente uguali, sono semplicemente simili.)

- la **curvatura** dello spazio determina la geometria, fornisce maggiori elementi di conoscenza. Su questo principio si basa anche la teoria della relativitá.

Einstein 1879-1955

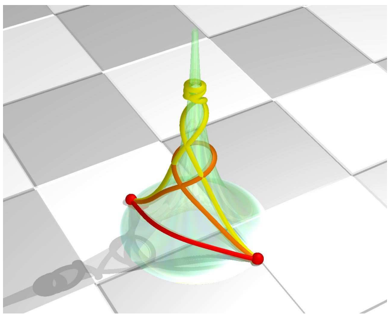
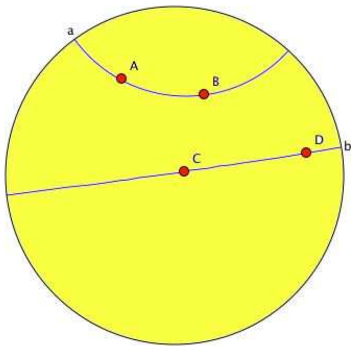
Geometria iperbolica: Esiste una geometria nella quale in un triangolo rettangolo la somma dei quadrati dei cateti é *piú piccola* del quadrato dell'ipotenusa. E' una geometria non realizzabile nello spazio tridimensionale (D. Hilbert), si puó realizzare in uno spazio a 5 dimensioni, é un problema aperto se possa stare in uno 4-dimensionale.

Geometri europei della fine 800, ideatori di questa geometria



Eugenio Beltrami 1835-1900, Felix Klein 1849-1925, Henry Poincaré 1854-1912

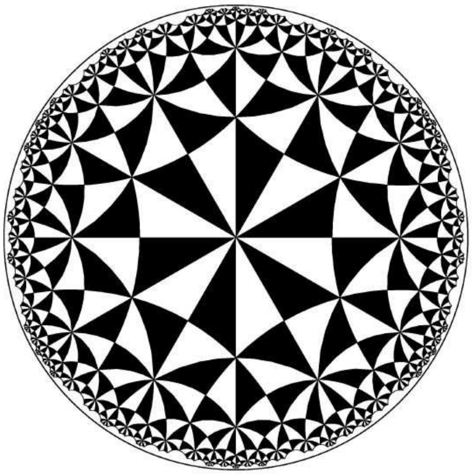
Modelli

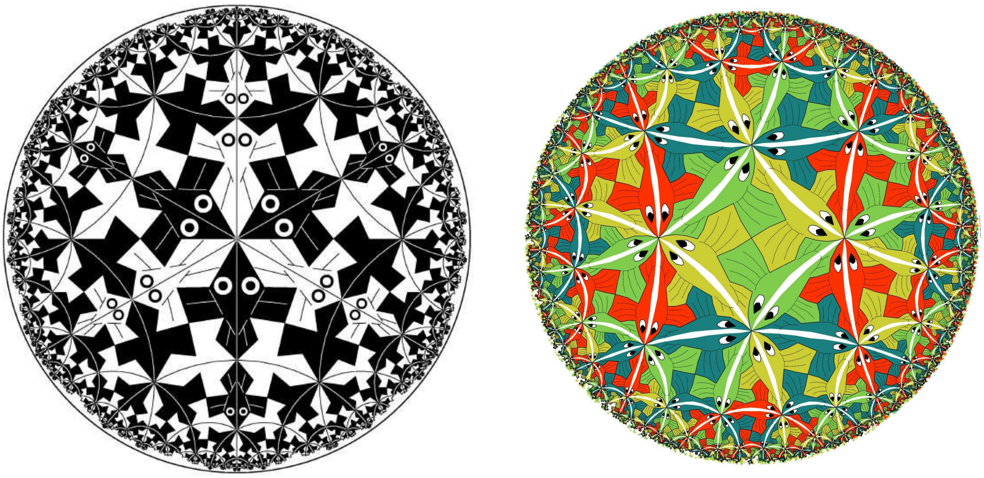
Pseudosfera Disco Iperbolico

.

Coxeter e M.C. Escher; il geometra e l'artista



Tassellatura iperbolica di Coxeter



Rielaborazione di Escher: Cerchi limite

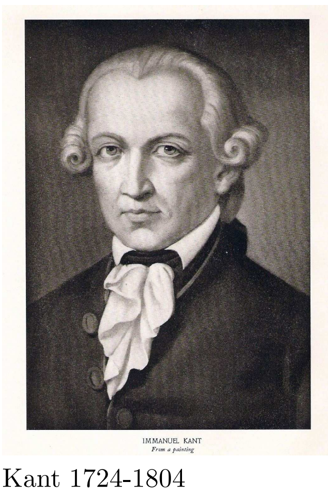
Teorema di uniformizzazione di Riemann.
Ogni geometria piana é riconducibile a una delle tre geometrie sopra descritte (euclidea, sferica, iperbolica).

Un teorema simile per dimensioni superiori non é stato dimostrato; in dimensione alta vi sono molte piú geometrie, la maggioranza di tipo iperbolico.

Riemann 1826-1866

I. Kant, **Critica della Ragion Pura**: *Lo spazio non é un concetto che si deriva dalla esperienza esterna... la rappresentzione dello spazio deve gia esistere come "fondamento" (a priori). Di conseguenza la rappresentazione dello spazio non puó essere acquisita dalla relazione con fenomeni esterni attraverso l'esperienza.*

B. Riemann, **Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria**: *Nasce quindi il problema del trovare il dato piú semplice dal quale dedurre le relazioni metriche dello spazio.... il sistema piú importante é quello concepito a fondamenta della geometria da Euclide. Questo dato é, come tutti i dati, non necessario, ma solo di certezza empirica, é una ipotesi...*



Kant 1724-1804

Teorema di incompletezza di Gödel.
In ogni sistema assiomatico matematico ci sono proposizioni che non possono ne essere provate ne confutate all'interno degli assiomi del sistema.

In particolare non é possibile provare
la consistenza degli assiomi
Si pone fine ai tentativi di determinare
assiomi generali che determinino
tutta la matematica.
La matematica non é un oggetto finito,
un computer non potrá mai essere
programmato per risolvere tutti
i problemi matematici.

Gödel 1906-1978

(**Prova dell'esitenza di Dio, Gödel - 1970**.
Proof
Axiom 1. (Dichotomy) A property is positive if and only if its negation is negative.
Axiom 2. (Closure) A property is positive if it necessarily contains a positive property.
Theorem 1. A positive property is logically consistent (i.e., possibly it has some instance.)
Definition. Something is God-like if and only if it possesses all positive properties.
Axiom 3. Being God-like is a positive property.
Axiom 4. Being a positive property is (logical, hence) necessary.
Definition. A property P is the essence of x if and only if x has P and P is necessarily minimal.
Theorem 2. If x is God-like, then being God-like is the essence of x.
Definition. NE(x) means x necessarily exists if it has an essential property.
Axiom 5. Being NE is God-like.
Theorem 3. Necessarily there is some x such that x is God-like.
(qed))

La scienza negata, il caso italiano (E. Bellone)

B. Croce 1866-1952

... le scienze naturali e le discipline matematiche,
di buona grazia, hanno ceduto alla filosofia
il privilegio della veritá, ed esse
rassegnatamente, o addirittura sorridendo,
confessano che i loro concetti
sono concetti di comodo e di pratica utilitá,
che non hanno niente da vedere
con la meditazione del vero

F. Enriques 1871-1946

...la ragione non puó ammettere mezzo
termine all'alternativa del vero o del falso ?
niente di piú lontano dal
concetto storico della scienza....
niuna teoria pretende oggi ad
una assoluta esattezza, ma ciascuna si dá
come un grado perfettibile della veritá,
che si svolge e cresce col progresso della ragione.

Enriques-Einstein a Bologna

presidente della societá filosofica italiana
organizza nel 1911 a Bologna il quarto congresso
internazionale di filosofia al quale invita:
Henri Bergson, Croce, Hans Vaihinger
ed anche Poincaré, Peano, Ostwald,
Arrhenius e Langevin
sancendo cosí la rottura con i maestri
dell idealismo italiano B. Croce e G. Gentile.