

Appunti di Geometria.

Marco Andreatta

Professore di Geometria, Dipartimento di Matematica, Trento

homepage : <http://www.science.unitn.it/~andreatt/>

e-mail: marco.andreatta@unitn.it

1 Le origini

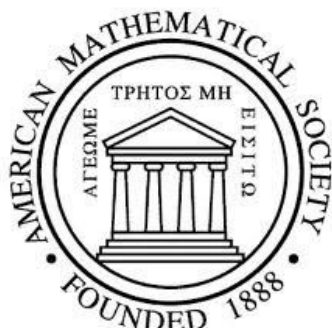
Geometria è una parola che viene dal greco $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ e significa misura della terra.

La geometria è una disciplina scientifica-filosofica che sta alla base della nostra cultura. Si fonda su un metodo logico deduttivo, formalizzato sin dall'antichità da Talete, Pitagora, Euclide e tanti altri, ispirato dall'intuizione ed in generale dalla fantasia della mente umana. Gli elementi di Euclide è uno dei libri più letti nella storia dell'umanità.

Nei dialoghi di Platone (Atene 427-347 a.C.) troviamo un continuo richiamo alla geometria e al suo argomentare.



Sulla porta di ingresso dell'Accademia, si dice, egli fece scrivere:



Ἄγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω
 ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

Agheomètreτος medeis eisito

Nessuno entri che non conosca la geometria.

La frase ha giocato un grande ruolo nella cultura moderna: Nicolò Copernico la usò come motto nel frontespizio del *De revolutionibus orbium caelestium*, l' American Mathematical Society la ha messa nel suo logo,

Consideriamo le parole che **Platone** fa dire a **Socrate** nel *Menone*

... A che sto pensando? alle opinioni vere. Anche le opinioni vere, finché restano, sono cose belle, capaci di realizzare tutto il bene possibile; solo che non acconsentono a rimanere per lungo tempo, e fuggono via dall' anima umana, per cui non hanno un gran significato, a meno che non s'incatenino con un ragionamento fondato sulla causalità. Ma proprio in questo compagno Menone, consiste l' anamnesi, quella reminescenza su cui sopra abbiamo convenuto.

Se collegate, esse dapprima divengono scienza e, quindi, cognizioni stabili. Ecco perché la scienza vale più della retta opinione: la differenza tra scienza e retta opinione sta, appunto, nel collegamento.

Quindi, nel rispondere al petulante Menone, Socrate prosegue in questo modo:

Ma poiché tu, per essere libero, non ti dai cura alcuna di dominar te stesso, e ti prepari anzi a comandare me e comandi, ti asseconderò: non c'è altro da fare! Dobbiamo dunque, sembra, esaminare la "qualità" di una cosa di cui non sappiamo ancora quello "che" essa sia. Se non altro, addolcisci almeno un poco il tuo dominio su di me, e concedimi di esaminare per ipotesi se la virtù sia insegnabile, o cosa sia.

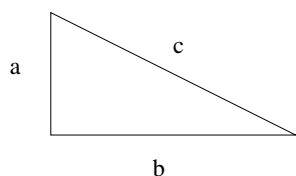
E quando dico "per ipotesi", intendo "ipotesi" nell'uso che spesso ne fanno gli studiosi di geometria, quando, ad esempio, interrogati a proposito di questa superficie, se essa, in forma di triangolo, possa essere inscritta in un dato cerchio, uno risponderebbe...

1.1 Pitagora

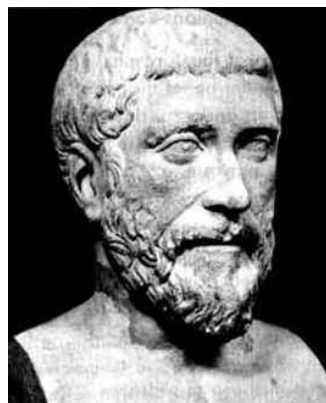
E per capire cosa intende Platone-Socrate quando dice fai come il geometra, prendiamo quello che sicuramente é il piú famoso teorema di geometria, il

Teorema di Pitagora.

Dato un triangolo rettangolo



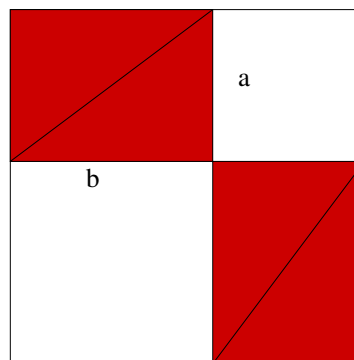
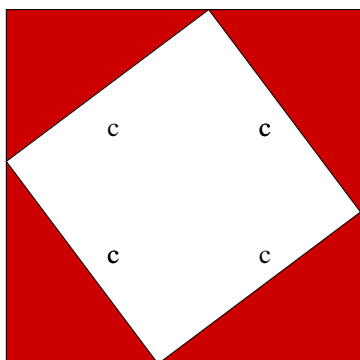
vale l'identitá $a^2 + b^2 = c^2$



Pitagora,
Mileto-Crotone 580-500 a.C.

La figura seguente contiene la

Prova del teorema: prendiamo due quadrati uguali di lati $a + b$. A questi quadrati togliamo quattro triangoli rettangoli uguali a quello in ipotesi ma in due modi diversi, come in figura (triangoli rossi). L' area della parte restante (bianca) é uguale, dunque vale $a^2 + b^2 = c^2$



1.2 Solidi regolari

Nel Timeo (360 a.c) Platone descrive e utilizza per l'interpretazione della realtà dei particolari modelli geometrici, i **solidi regolari**, detti anche solidi platonici. Un solido regolare è un sottoinsieme dello spazio, convesso e limitato, non contenuto in un piano, delimitato da un numero finito di facce tali che :

- due facce diverse, se si incontrano, hanno in comune un vertice o un intero lato
- in ogni vertice concorre lo stesso numero di facce
- tutte le facce sono uguali ad un dato poligono regolare.

I matematici greci hanno classificato i solidi regolari, dimostrando il seguente teorema; la associazione con gli elementi "base" della natura e' stata fatta da Platone nel Timeo.

Teorema I solidi regolari sono solo cinque, come raffiguato nella seguente illustrazione, nell'ordine: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro.



Fuoco, Terra, Aria, Universo, Acqua

La dimostrazione di questo Teorema segue dalle ipotesi con alcune semplici deduzioni logiche. Dapprima si osserva che in un vertice debbono concorrere almeno tre facce, altrimenti il solido sarebbe contenuto in un piano. In un vertice possono concorrere 3, 4, 5 triangoli equilateri, non di più. Se infatti in un vertice concorressero 6 triangoli equilateri la somma dei loro angoli al vertice darebbe 360 gradi, dunque il solido sarebbe contenuto in un piano. Più di 6 triangoli non possono concorrere, non ci stanno proprio! Similmente si deduce che in un vertice possono concorrere solo 3 quadrati e solo 3 pentagoni. 3 poligoni regolari con più di cinque lati non possono concorrere in un vertice! Quanto sopra esaurisce tutte le possibilità. Verificare che il tetraedro è l'unico solido regolare ai cui vertici concorrono tre triangoli, e similmente per gli altri solidi regolari, richiede qualche ulteriore osservazione che tralasciamo per brevità. (Un modo è attraverso la bella formula di Eulero che collega il numero di vertici (v), di spigoli (s) e di facce (f) in un solido convesso: $v-s+f = 2$).

1.3 Costruzione di un solido con la "divina proporzione"

Vorrei soffermarmi un momento sulla *esistenza* di questi solidi. I greci avevano dato delle descrizioni esplicite per la loro "costruzione", con l'eccezione dell'icosaedro. Negli elementi di Euclide la costruzione di quest' ultimo è posta come problema aperto.

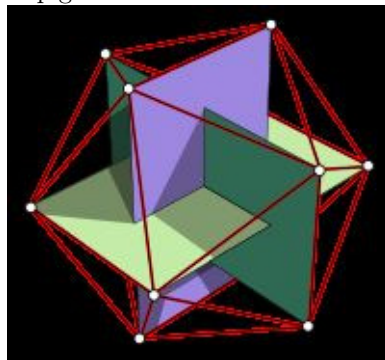
Una stupenda e rigorosa costruzione dell'icosaedro viene data da Luca Pacioli (San Sepolcro 1445 - Firenze 1517); i suoi scritti sono per altro accompagnati da bellissime illustrazioni di tutti i solidi platonici fatte dall' amico Leonardo da Vinci.



La costruzione dell'icosaedro di Luca Pacioli è la seguente.

Si prendano tre rettangoli aurei uguali tra loro. Ricordiamo che un rettangolo aureo è un rettangolo tale che, se gli si toglie il quadrato formato dal lato corto, il rettangolo rimanente è simile a quello di partenza. Si verifica, con una semplice proporzione, che se il lato corto ha misura 1 il lato lungo deve aver misura $1 + \sqrt{5}/2$. Quest'ultimo numero è stato definito da fra Pacioli come "divina proporzione".

Si dispongano i 3 rettangoli "aurei" tra loro "ortogonalmente" come in figura; Si colleghino quindi con spigoli tutti i vertici e si ottiene un icosaedro.



I solidi platonici hanno affascinato ed ispirato parecchi artisti, tra gli altri il sopracitato Leonardo, e Salvador Dali, del quale riportiamo un quadro che rappresenta l'ultima cena all'interno di un dodecaedro.



Per concludere questa parte osserviamo come i solidi platonici riappaiono costantemente in matematica: in tempi moderni a loro si riconducono le classificazioni dei gruppi di Lie semplici (o teoria delle simmetrie), la classificazione delle singularità (o teoria delle catastrofi) in due variabili.

1.4 Euclide

Euclide scrive una sorta di enciclopedia della Matematica in tredici libri denominati *Elementi*, sei dei quali dedicati alla Geometria, costituita da

Oggetti, definiti a priori, tramite assiomi o postulati, e da un

Metodo, logico deduttivo che si basa su quelle che Euclide chiama nozioni comuni.

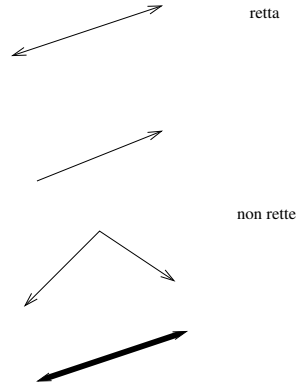


Euclide
Alessandria 325-265 a.C.

Quali sono gli assiomi necessari per enunciare e dimostrare il teorema di Pitagora? Certamente gli assiomi di retta (e quindi segmento, angolo,...) che troviamo nel primo dei sei libri: una **retta** é un oggetto a priori caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- i) Si estende all' infinito in due direzioni
- ii) Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti
- iii) dati due punti su una retta il cammino piú breve per andare da un punto all'altro é dato dalla retta stessa (la retta é una geodetica)
- iv) se togliamo un punto da una retta rimangono due pezzi separati.

Esempi:



- Ma poi assumiamo anche l'esistenza di un quadrato di lato assegnato.
- Questa assunzione é equivalente alla seguente: *Data una retta ed un punto esterno ad essa esiste una ed una sola retta passante per quel punto e parallela alla retta di partenza*
- Questa é a sua volta equivalente al *Teorema di Pitagora*.

Il punto é ora il seguente: possiamo dimostrare una qualunque delle tre affermazioni precedenti, senza assumerne un'altra e partendo solo dai 4 postulati di retta? La risposta é no, le tre affermazioni equivalenti vanno postulate e vengono chiamate il quinto postulato (ella geometria di) Euclide.

Per capire questo ci sono voluti 2.000 anni di matematica.

Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), gesuita, professore di Teologia e Matematica a Pavia, si propose di dimostrare per contraddizione l'esistenza di un quadrato di lato arbitrario (quadrilatero di Saccheri): di fatto sviluppó i primi esempi di **geometria non euclidea**.

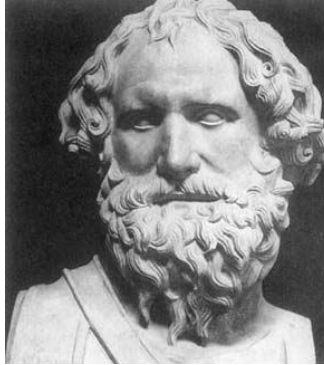
EUCLIDES
 AB OMNI NÆVO VINDICATUS;
 SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
 QUO STABILIUNTUR
 Prima ipsa universæ Geometrix Principia.
 AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
 SOCIETATIS IESU
 In Ticinensi Universitate Mathematicos Professore.
OPUSCULUM
EX. MO SENATUI
MEDIOLANENSI
 Ab Auctore Dicitum.
 MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
 Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permiff.

2 Sulla geometria della sfera

2.1 Archimede

I matematici greci avevano scoperto che l'area di un cerchio è proporzionale al raggio al quadrato, i.e. $A = \pi r^2$; la costante di proporzionalità, essendo quindi l'area del cerchio unitario, viene indicata con la lettera greca π e denominata p-greco.

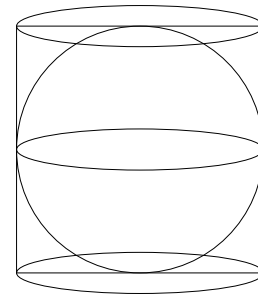
Uno si spinse molto più in là: Archimede (Siracusa 287-212 a.C.) calcolò con la maggior precisione dell'epoca il valore di π , riuscendo a determinare con esattezza le prime 9 cifre dopo la virgola della sua scrittura decimale :3, 141592653 (π non è un numero razionale, ovvero non si può scrivere come quoziente di due interi, ed è un numero trascendente (ovvero non è nemmeno radice di un polinomio a coefficienti interi)).



Ma il risultato per cui Archimede andava più fiero era il seguente (si dice abbia chiesto di far scolpire sulla sua tomba la figura della sfera e del cilindro circoscritto e che Cicerone abbia dato testimonianza della realizzazione di questo fatto).

Teorema La superficie della sfera di raggio r è uguale alla superficie laterale del cilindro circoscritto:

$$2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$$



Il problema anche in questo caso era determinare il fattore di proporzionalità davanti a r^2 , i.e. 4π . Per farlo Archimede dimostrò che proiettando la sfera dal diametro verticale sul cilindro circoscritto, con una proiezione orizzontale, l'area viene preservata. Questa dimostrazione, non difficile, ma nemmeno ovvia, di solito viene fatta nelle scuole superiori. Venne "persa o dimenticata" dopo la morte di Archimede e riscoperta molti secoli dopo da Galileo.

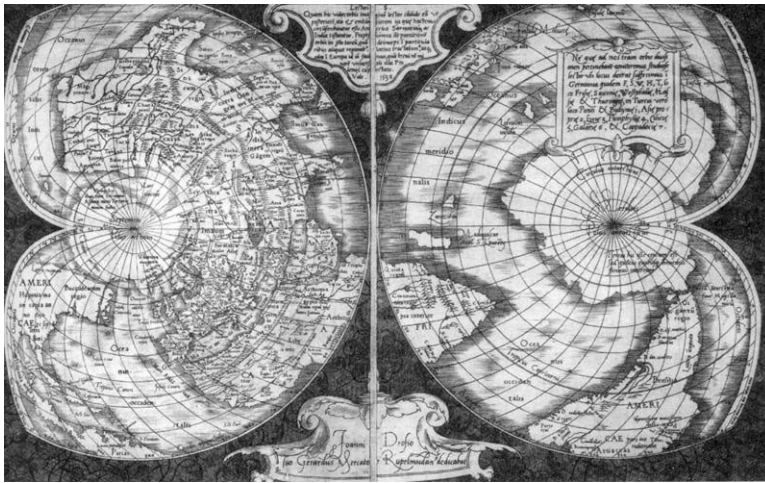
Ci si convince che il mondo é tondo; magari gli scienziati lo sapevano ma diventa importante fare misure, dividere territori, tracciare rotte, su scala terrestre.

Nel 1493 una bolla papale assegna le terre a ovest del *meridiano che sta 100 leghe ad ovest delle Azzorre* alla Spagna. Nessuno però sa come determinare questo meridiano.

Si bandiscono dei premi in denaro, il primo dalla Spagna nel 1567.

Gerardo Mercatore (1512-1594), matematico, astronomo, cartografo, eretico si sforza di ridurre la geometria del globo terrestre alla geometria piana.

Proiezioni di Mercatore

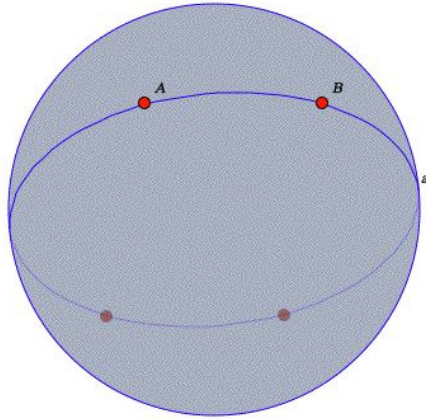


La geometria sferica: una **Sfera** é il luogo dei punti nello spazio equidistanti una lunghezza r da un punto fisso detto O . Pensiamo di poter muoverci solo sulla superficie della sfera e che il raggio r sia enormemente grande rispetto alle nostre dimensioni.

Una **retta** vogliamo sia come prima caratterizzata da:

- ii) Si estende all' infinito in due direzioni
- ii) Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti
- iii) dati due punti su una retta il cammino piú breve per andare da un punto all' altro é dato dalla retta stessa (la retta é una geodetica)
- iv) se togliamo un punto da una retta rimangono due pezzi separati.

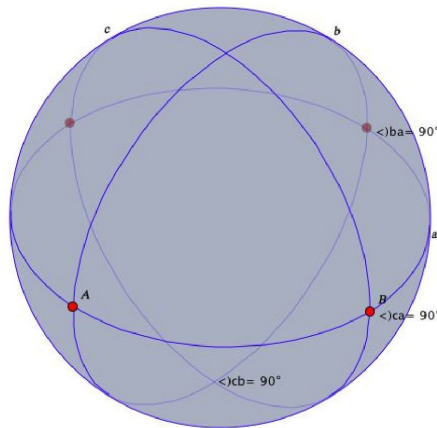
Le rette sulla sfera sono i **cerchi massimi**, ovvero i cerchi che si ottengono intersecando la sfera con un piano passante per l'origine



Di questo fatto se ne puó dare una **prova** matematica.

Per convincersene basta provare a tendere un filo tra due punti su un pallone. Oppure considerare la rotta che percorre un aereo da Milano a New-York, ...

In geometria sferica **non vale** il teorema di Pitagora:



Nella figura la sfera é divisa in otto triangoli rettangoli uguali tra loro (equilateri e con tre angoli retti!!)

In questa geometria per un triangolo rettangolo la somma dei quadrati dei cateti é *piú grande* del quadrato dell'ipotenusa.

Non esistono quadrati e non esistono parallele



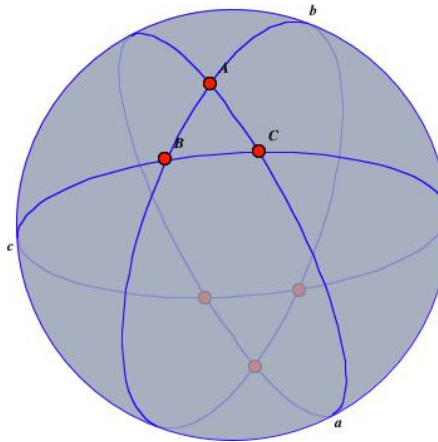
Gauss,
Gottinga, 1777-1855



Teorema dell' eccesso di Gauss.

Dato un triangolo sferico come in figura
con angoli A, B, C la sua area
é data dalla formula

$$\text{Area} = r^2(A + B + C - \pi)$$



Prova Osserviamo che le tre lune definite dagli angoli A, B, C coprono tutta la sfera, precisamente ricoprono tre volte il triangolo ed il triangolo antipodale, ogni altro punto sta solo su una luna.

Abbiamo dunque che vale:

$$\text{area luna } A + \text{area luna } B + \text{area luna } C = \text{area della sfera} + 4 \text{ area del triangolo}$$

Ovvero:

$$4r^2A + 4r^2B + 4r^2C = 4r^2\pi + 4 \text{ Area}$$

Osservazioni

- la geometria sferica non e' equivalente (neanche localmente) alla geometria euclidea (**Teorema Egregium**).

- gli angoli determinano il triangolo.
(In geometria euclidea due triangoli con gli stessi angoli non sono necessariamente uguali, sono semplicemente simili.)

- la **curvatura** dello spazio determina la geometria, fornisce maggiori elementi di conoscenza. Su questo principio si basa anche la teoria della relatività.



Einstein 1879-1955

Geometria iperbolica: Esiste una geometria nella quale in un triangolo rettangolo la somma dei quadrati dei cateti *é piú piccola* del quadrato dell'ipotenusa. E' una geometria non realizzabile nello spazio tridimensionale (D. Hilbert), si puó realizzare in uno spazio a 5 dimensioni, é un problema aperto se possa stare in uno 4-dimensionale.

Geometri europei della fine 800, ideatori di questa geometria



Eugenio Beltrami 1835-1900,

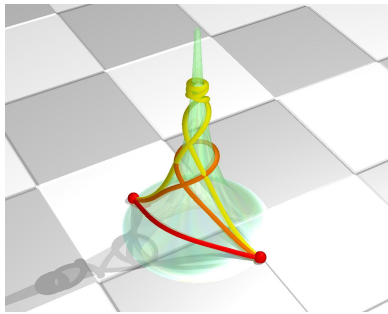


Felix Klein 1849-1925,

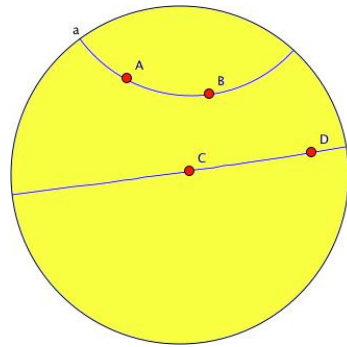


Henry Poincaré 1854-1912

Modelli

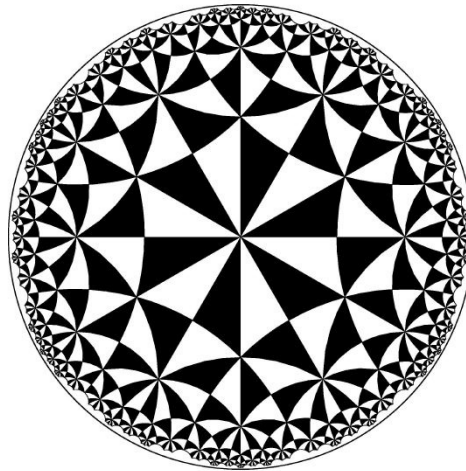


Pseudosfera

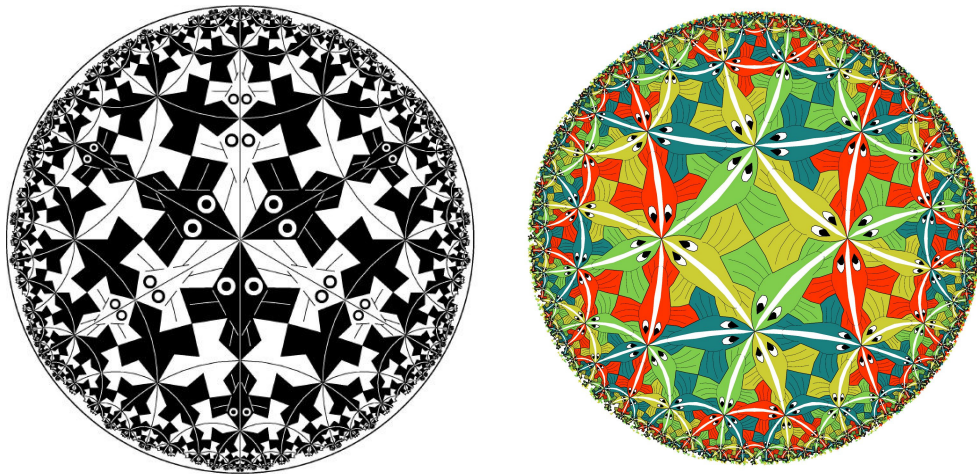


Disco Iperbolico

Coxeter e M.C. Escher; il geometra e l'artista



Tassellatura iperbolica di Coxeter



Rielaborazione di Escher: Cerchi limite

Teorema di uniformizzazione di Riemann.

Ogni geometria piana é riconducibile a una delle tre geometrie sopra descritte (euclidea, sferica, iperbolica).

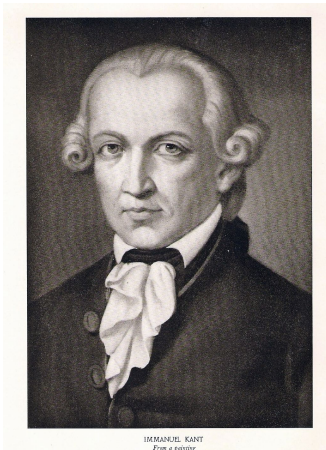


Riemann 1826-1866

Un teorema simile per dimensioni superiori non é stato dimostrato; in dimensione alta vi sono molte piú geometrie, la maggioranza di tipo iperbolico.

I. Kant, Critica della Ragion Pura: *Lo spazio non é un concetto che si deriva dalla esperienza esterna... la rappresentazione dello spazio deve gia esistere come "fondamento" (a priori). Di conseguenza la rappresentazione dello spazio non puó essere acquisita dalla relazione con fenomeni esterni attraverso l'esperienza.*

B. Riemann, Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria: *Nasce quindi il problema del trovare il dato piú semplice dal quale dedurre le relazioni metriche dello spazio... il sistema piú importante é quello concepito a fundamenta della geometria da Euclide. Questo dato é, come tutti i dati, non necessario, ma solo di certezza empirica, é una ipotesi...*



Kant 1724-1804

La scienza negata, il caso italiano (E. Bellone)



B. Croce 1866-1952

... le scienze naturali e le discipline matematiche, di buona grazia, hanno ceduto alla filosofia il privilegio della verità, ed esse rassegnatamente, o addirittura sorridendo, confessano che i loro concetti sono concetti di comodo e di pratica utilità, che non hanno niente da vedere con la meditazione del vero



F. Enriques 1871-1946

...la ragione non può ammettere mezzo termine all'alternativa del vero o del falso? niente di più lontano dal concetto storico della scienza... niuna teoria pretende oggi ad una assoluta esattezza, ma ciascuna si dá come un grado perfettibile della verità, che si svolge e cresce col progresso della ragione.

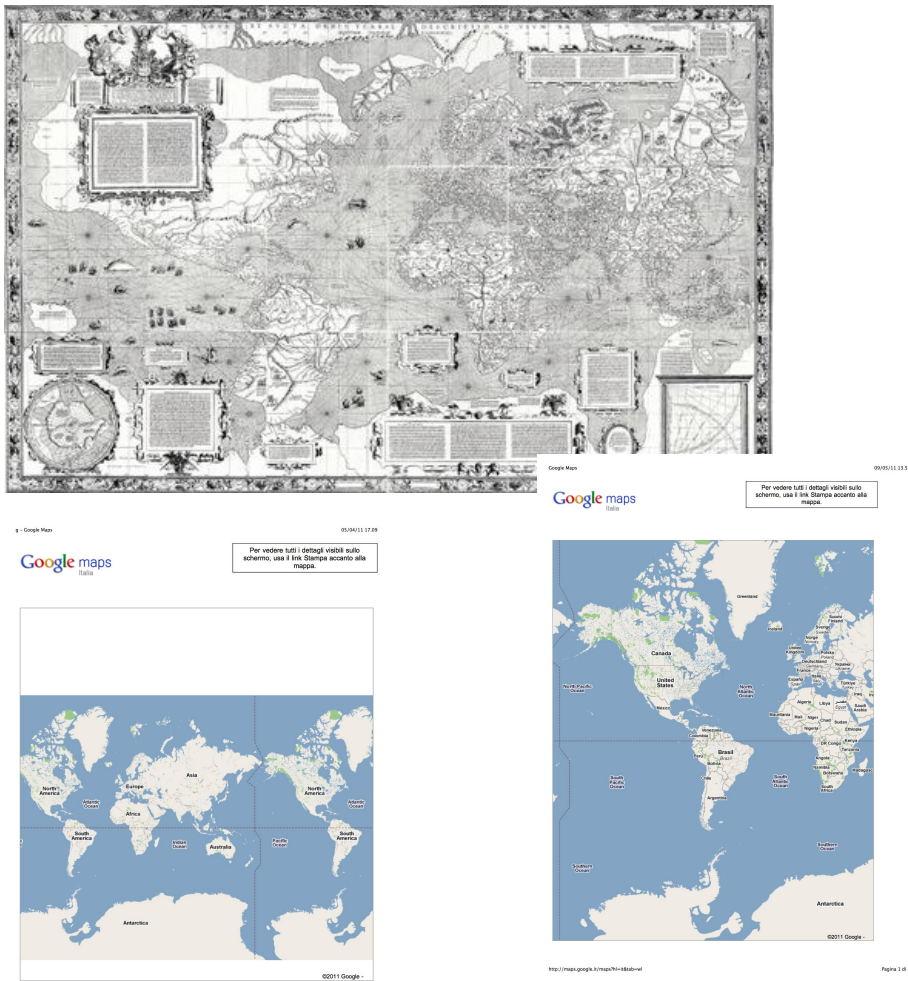


Enriques-Einstein a Bologna

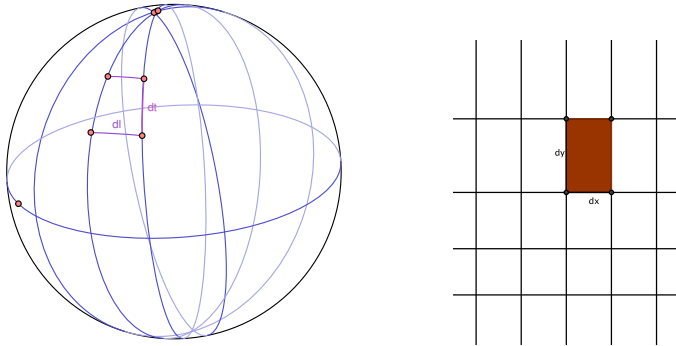
presidente della società filosofica italiana organizza nel 1911 a Bologna il quarto congresso internazionale di filosofia al quale invita: Henri Bergson, Croce, Hans Vaihinger ed anche Poincaré, Peano, Ostwald, Arrhenius e Langevin sancendo così la rottura con i maestri dell'idealismo italiano B. Croce e G. Gentile.

3 Proiezione conforme di Mercatore

Un matematico, di mestiere mercante e cartografo, l'olandese Gerard de Cremer (Mercatore) (1512 -94) ideò un bellissimo modo per proiettare la sfera dal suo centro sul cilindro circoscritto (che poi viene aperto e "spianato"). La sua proiezione ha dato origine alla cartografia moderna. Delle due immagini successive la prima è quella di una proiezione di Mercatore della fine del '500, la seconda contiene due proiezioni di Mercatore estratte da Google Earth.



Mercatore ebbe l'idea di proiettare sul cilindro circoscritto dal centro della sfera in modo da conservare la "forma" delle terre emerse. Per questo richiede che la proiezione rispettasse le proporzioni tra i lati di un rettangolo con due lati paralleli all'equatore e due lungo i meridiani, come in figura, e quelli della sua proiezione.

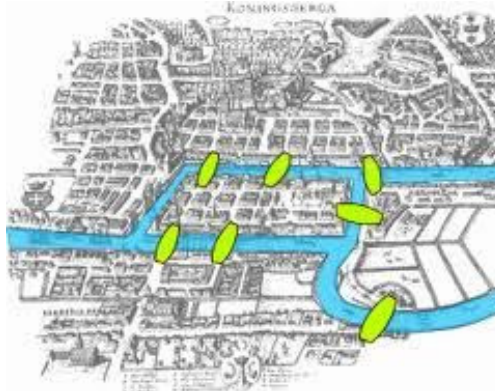


Impose quindi la condizione $dy/dt = dx/dl$. Si verifica facilmente che $dx/dl = 1/\cos(t)$. Da questo, integrando, si ricava la *formula* di Mercatore $y = \ln(\tan(t) + 1/\cos(t))$, che definisce la ascissa y della proiezione in termini della coordinata t , i.e. della latitudine sulla sfera (la coordinate x e' invece costante mente uguale alla longitudine).

Questa proiezione che conserva le proporzioni dei lati dei triangoli conserva quindi anche gli angoli; per questo divenne subito la carta geografica ideale per la navigazione terrestre.

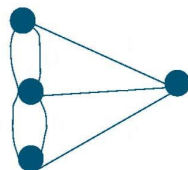
4 Topologia

Prima di parlare di un famoso problema legato alla sfera (in più) dimensioni, vorrei introdurre la teoria geometrica detta Topologia. Per farlo parlerò del problema dei Ponti di Königsberg. Questo importante centro politico e culturale della Germania, dove abitava tra l'altro Emanuel Kant, è attraversato da un fiume, che, dividendosi, forma delle isole, sopra il quale furono costruiti 7 ponti, come nella figura che rappresenta la mappa della città nel 1652.



Il problema di viabilità che si ponevano i cittadini all'epoca era il seguente: trovare un percorso (non necessariamente chiuso) che passi da tutti i ponti della città una ed una sola volta. Problemi di viabilità simili e più complessi sono attualmente sul tavolo di molti comuni e vanno affrontati con la matematica. Nel

1735 Eulero dimostrò che questo specifico problema non ha soluzione. Dapprima semplificò la formulazione del problema "deformando" la terra ferma in punti (nodi) e i ponti in segmenti che li uniscono (spigoli o archi) come in figura



Questa semplificazione diede origine alla teoria dei grafi e alla topologia; quest'ultima è lo studio della geometria delle forme che si può ottenere con deformazioni senza "strappi", "sovrapposizioni" o "incollature".

Eulero osserva quindi che quando uno entra in un nodo attraverso un ponte ne deve quindi uscire (eccetto nel nodo finale). Dunque per poter percorrere i ponti una sola volta bisogna che nel nodo arrivino un numero pari di ponti; questo numero si chiama grado del nodo.

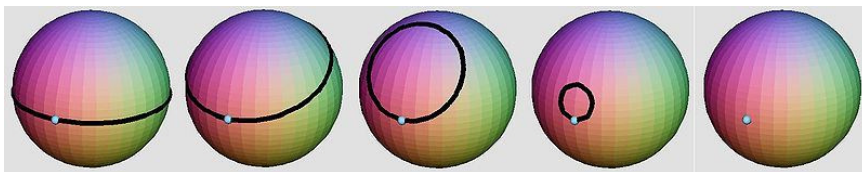
Eulero, con questa osservazione, ha dimostrato il seguente

Teorema Un qualsiasi grafo è percorribile solo se (condizione necessaria) esso ha tutti i nodi di grado pari, o due di essi sono di grado dispari.

Più tardi è stato dimostrato che la condizione è anche sufficiente e che per percorrere un grafo "possibile" con due nodi di grado dispari, è necessario partire da uno di essi, e si terminerà sull'altro nodo dispari.

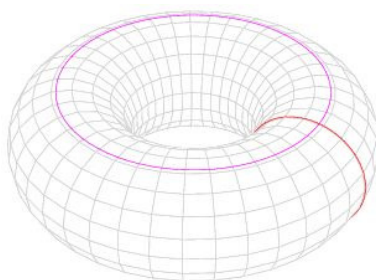
4.1 la congettura di Poincaré: un premio da un milione di dollari.

La sfera è semplicemente connessa, ovvero ogni cammino chiuso può essere "deformato" ad un punto senza dover essere strappato (dunque topologicamente).



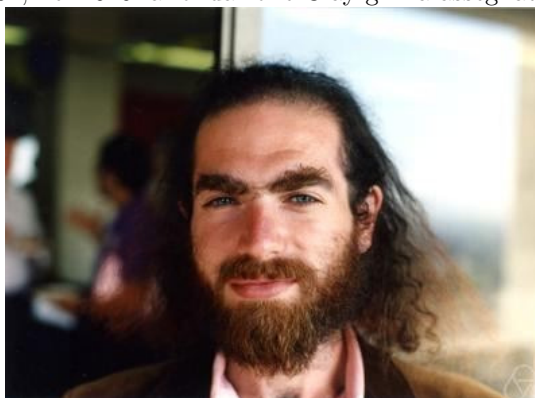
Poincaré osservò che la sfera, a meno di deformazioni topologiche, è l'unica superficie chiusa (ovvero compatta e senza bordi) semplicemente connessa.

La figura seguente rappresenta la ciambella con un buco (il Toro) e mostra due cammini chiusi che non possono essere deformati ad un punto.



Poincaré ha congetturato che questo vale per le sfere di dimensione tre. Questo è uno dei sette problemi scelti dalla fondazione americana Clay come problemi matematici del nuovo millennio; per la soluzione di ciascun problema la fondazione offre un premio di un milione di euro.

Grigorij Perelman, Leningrado, 13 giugno 1966, ha dimostrato la Congettura di Poincaré nel 2002; nel 2010 la fondazione Clay gli ha assegnato il premio.



Concludo questo capitolo con l'immagine di un bancone da bar progettato dall'architetto Zaha Hadida, Baghdad, 31 ottobre 1950; laureata in matematica, si ispira alla Topologia nelle sue creazioni.



5 La geometria Proiettiva

Se la pazienza ed il tempo del lettore lo consentono vorrei proseguire con un altro argomento che mi sta molto a cuore: la geometria proiettiva. Disciplina nata qualche tempo fa per opera di illustri artisti italiani, è ancor oggi una delle aree più attive nella ricerca matematica con una scuola italiana di gran valore. E' il mio settore di ricerca principale.

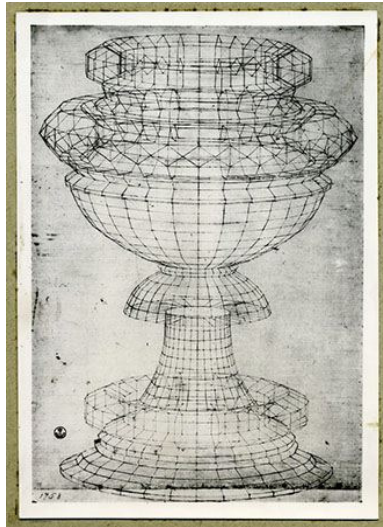
L' idea di realizzare un disegno prospettico, ovvero di proiettare lo spazio su un piano (foglio), nasce nel Rinascimento per opera di artisti italiani quali ad esempio Paolo Uccello, Pratovecchio1397-Firenze1475, e Piero della Francesca, Sansepolcro 1416-1492. Le successive immagini raffigurano a battaglia di San Romano, di Paolo Uccello



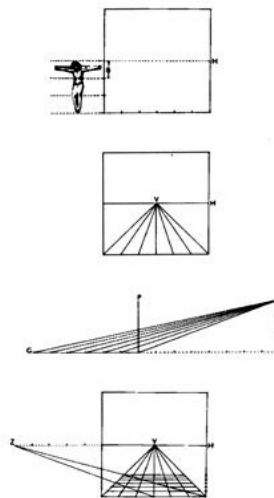
la Città ideale di Piero della Francesca



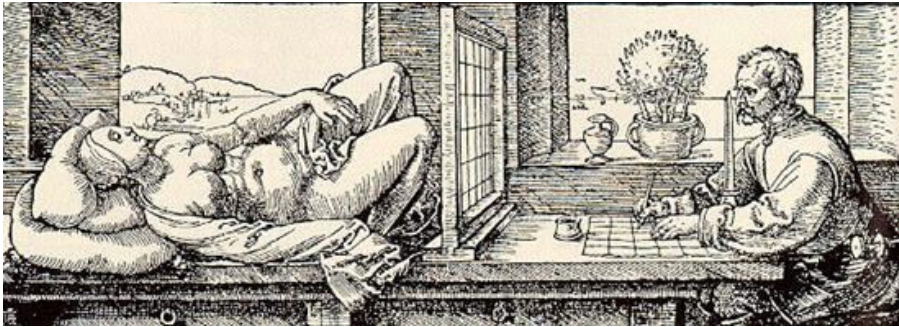
e lo studio di un calice attribuito o a Piero o a Paolo.



Un primo trattato teorico sul disegno prospettico è di Leon Battista Alberti, Genova 1404- Roma 1472, *De Pictura*; fu scritto nel 1435 in latino e poi nel 1436 in volgare. La figura seguente riporta alcune figure del libro con le "regole" insegnate ancor oggi nei corsi di disegno tecnico.

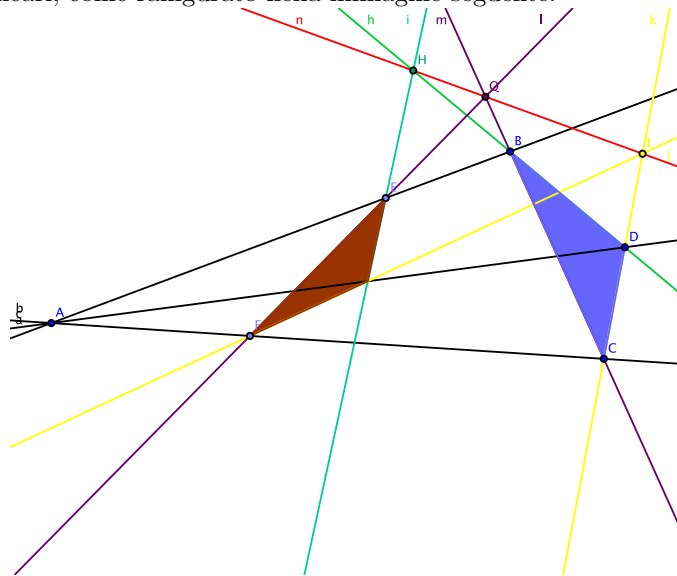


Pochi anni dopo il pittore tedesco Albrecht Dürer, Norimberga 1471-1528, scende più volte in Italia per apprendere le regole che stanno alla base della prospettiva, probabilmente le impara da Fra Pacioli. Scrive quindi quello che viene considerato il primo libro di scienza in lingua tedesca, *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit*. La figura seguente raffigura un disegno del Dürer che descrive la tecnica pittorica detta del Velo dell' Alberti.



E' al matematico francese Girard Desargues, Lione 1591-1661, che viene attribuita la nascita della geometria proiettiva come disciplina matematica astratta. A Desargues, che si occupa di prospettiva e di taglio di pietre (stereotomia), dimostra tra l'altro il seguente risultato.

Teorema Due triangoli in prospettiva hanno le intersezioni dei lati corrispondenti colineari, come raffigurato nella immagine seguente.



La dimostrazione di questo teorema è abbastanza difficile, se si rimane nel piano della figura. Diventa semplice se cambiamo "punto di vista" (e sorvoliamo su alcuni aspetti formali): prendiamo la retta passante per i punti A e D e la solleviamo dal piano. I due triangoli diventano due triangoli nello spazio e ognuno di essi definisce un piano (tre punti non allineati nello spazio definiscono un piano). Questi due piani nello spazio si intersecano in una retta e su questa retta devono stare le intersezioni dei lati corrispondenti!

Come omaggio alla mia città ricordo il gesuita Andrea Pozzo, Trento 1642 - Vienna 1709, che ha applicato le tecniche di prospettiva all'architettura ed ha scritto su questo un importante trattato: *Perspectiva pictorum et architectorum*.

La figura seguente riproduce una "cupola" disegnata dal Pozzo su un soffitto praticamente piatto nella chiesa di Mondovì.



lineo (nella posizione P) considerando l'angolo della tangente a C in P con la tangente in un punto vicino P_1 , dividendolo per l'arco PP_1 , e passando al limite per P_1 tendente a P . Si definisce così una *prima curvatura* $1/r$, o *flessione*, di C in P ; r ne è il *raggio di prima curvatura* o di *flessione*; r è pure il raggio del *circolo osculatore*, il quale sta nel piano osculatore (v. CURVE) e si definisce mediante tre punti di C che tendono a P ; la retta perpendicolare al piano osculatore nel centro di detto circolo è l'asse di *curvatura*, ed è la posizione limite della retta comune ai piani normali a C in P e P_1 quando P_1 tende a P su C . La stessa costruzione, applicata ai piani osculatori di C anziché alle tangenti, cioè, che fa lo stesso, alle *binormali* di C , che sono le perpendicolari ai piani osculatori nei rispettivi punti di C , conduce a definire una *seconda curvatura*, o *torsione* $1/\rho$, di C in P , che sarebbe nulla per una curva piana (perché allora il piano osculatore è fisso, e coincide col piano della curva), e che misura la rapidità con cui C si scosta in P dall'andamento piano; ρ è il raggio di *seconda curvatura*, o di *torsione*, di C in P . Ripetendo ancora la stessa costruzione per le normali principali di C si trova una *curvatura totale* $1/R$, che non dà nulla di nuovo, perché $1/R^2 = 1/r^2 + 1/\rho^2$. La linea C è nota di forma e di grandezza quando ne siano date le *equazioni intrinseche* $r = r(s)$, $\rho = \rho(s)$, che esprimono r , ρ in funzione dell'arco s .

Si può giudicare della curvatura d'una superficie S in un suo punto P conoscendo quella delle linee tracciate su S e uscenti da P nelle varie direzioni; basta anzi considerare le *sezioni normali*, cioè le linee piane che si hanno tagliando S coi piani che passano per la normale n ad S in P ; occorre però scegliere su n un senso positivo, e quindi attribuire un segno $+$ o $-$ al raggio di curvatura R di una sezione normale secondoché essa è concava, in P , dalla parte della normale positiva oppure dalla parte opposta. Studiando allora come varia R al variare della sezione normale corrispondente, si trova che R ammette un valor massimo ed un valor minimo (da intendersi in senso relativo), R_1 e R_2 ; e questi due valori spettano a due sezioni normali fra loro perpendicolari, le *sezioni normali principali*; la curvatura $1/R$ della sezione normale che fa l'angolo θ con la prima delle due sezioni normali principali è espressa mediante le due curvature principali $1/R_1$ e $1/R_2$ dalla formula (di Eulero): $\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}$. Il prodotto $K = 1/(R_1 R_2)$ si chiama la *curvatura totale* di S in P (K. F. Gauss, 1827). La forma di S in un piccolo intorno di P dipende dal segno di K ; secondoché $K \geq 0$, cioè secondoché i segni di R_1 e R_2 sono eguali o opposti, detta forma è quella di un ellissoide o di un iperboloido ad una falda. Come caso intermedio, se $K = 0$, cioè se è nulla in P una delle curvature principali, S ha in P la forma di un cilindro. Nei tre casi P si dice rispettivamente *punto ellittico*, *iperbolico*, *parabolico*. Il valore di K non muta se S si flette, come se fosse un tessuto flessibile e inestensibile, senza strappi né stiramenti né contrazioni. Si può dare di K il seguente significato intrinseco: considerato su S un *triangolo geodetico*, ossia un triangolo i cui lati siano linee geodetiche, la differenza tra la somma degli angoli del triangolo e π (*eccesso geodetico* del triangolo) vale $\int K d\sigma$ esteso all'area del triangolo (teor. di Gauss). In particolare, sulle *superficie a curvatura totale costante*, come il piano, la sfera e la pseudosfera, K è il rapporto tra l'eccesso e l'area di un triangolo geodetico.

In varie questioni occorre la *curvatura media* di una superficie: $H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$. Essa è nulla per le *superficie ad area minima* (v. SUPERFICIE: Superficie notevoli).

Si può estendere (Riemann, 1854) la nozione della curvatura a una varietà V con più di tre dimensioni, sulla quale si suppone dato un sistema di coordinate curvilinee u_1, u_2, \dots, u_n , e assegnato inoltre l'elemento lineare, ossia l'espressione del quadrato ds^2 della distanza infinitesima ds di due punti di V infinitamente vicini e di coordinate u_1, u_2, \dots, u_n e $u_1 + du_1, u_2 + du_2, \dots, u_n + du_n$:

$$ds^2 = \sum a_{ik} du_i du_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

In tali ipotesi sono definite su V le linee geodetiche; sicché se si prendono due geodetiche uscenti da un punto $P(u_1, u_2, \dots, u_n)$ di V secondo due direzioni distinte, che vadano da P ai punti infinitamente vicini $u_1 + du_1, \dots, u_n + du_n$ e $u_1 + \delta u_1, \dots, u_n + \delta u_n$, riesce definita una *superficie geodetica S* uscente da P , ossia la superficie ricoperta dalle geodetiche uscenti da P nelle direzioni che vanno da P a tutti i punti $u_1 + \lambda du_1 + \mu \delta u_1, \dots, u_n + \lambda du_n + \mu \delta u_n$; la curvatura totale K di S in P dipende in generale da P e da S , e si chiama la *curvatura di V nel punto P* e secondo la *giacitura della superficie S*. Se, per ogni singola posizione

di P su V , essa non dipende dalla superficie geodetica F che si è fatta passare per P , cioè se essa è *localmente* costante, allora essa riesce indipendente anche da P e ovunque costante su V , la quale si chiama allora una varietà a curvatura costante (teor. di F. Schur).

BIBL.: Oltre i trattati di geometria differenziale, ad es. di L. Bianchi, di G. Darboux, di W. Blaschke, ecc., si veda anche: T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, redatte da E. Persico, Roma 1925, cap. VII. E. G. T.

CURVE. — Nell'uso comune della parola, « curva » significa linea non retta e non composta di linee rette. Già Parmenide d'Elea, secondo Proclo nel *Commento all'Euclide*, distingueva le linee in rette, curve e miste. Ma nell'evoluzione del linguaggio matematico, che tende sempre ad eliminare le eccezioni affermando una veduta di continuità, la parola « curva » è divenuta sinonimo di « linea », ritenendosi dunque la retta come caso particolare della curva. Gli antichi Greci hanno conosciuto diverse specie di curve notevoli, oltre il cerchio: in primo luogo le coniche, e poi le curve d'ordine superiore usate per la soluzione del problema della trisezione dell'angolo o della duplicazione del cubo, cissoide di Diocle e conicoide di Nicomede, e poi ancora la quadratrice di Ippia e Dinostrato, la spirale d'Archimede, ecc. Queste curve hanno offerto occasione a trattare diversi problemi (concernenti le tangenti, i massimi e minimi), che la geometria moderna ha risoluto in una maniera generale, e che stanno alla base del calcolo differenziale.

1. *Sulla definizione di curva.* — Nell'antica scuola di Pitagora (fondata il 540 a. C.) la linea si pensava costituita di punti-monadi, corpiccioli elementari di piccola estensione: da questa veduta, che risponde ad una conoscenza empirica non ancora razionalizzata, traevano i Pitagorici diverse conseguenze importanti, e in primo luogo la possibilità della misura delle linee. Ma la teoria andò incontro ad una crisi in seguito alla scoperta dell'incommensurabili, fatta nella stessa scuola.

Si approfondì allora dagli Eleati (Parmenide e Zenone d'Elea) l'analisi del concetto degli enti geometrici, e si riuscì a capire che essi hanno un significato puramente ideale: il punto è senza estensione, la linea non si ottiene sommando dei punti ed è pura lunghezza senza larghezza, la superficie non ha spessore, ecc.

La discussione intorno all'esistenza di tali figure matematiche era viva in Grecia nella seconda metà del sec. V a. C. Sofisti, come Protogora d'Abdera, sostenevano che le vere linee hanno una certa larghezza e differiscono perciò dal concetto dei matematici; così il cerchio deve avere, non un punto, ma un piccolo tratto a comune con la tangente. Si trova qui una veduta empirica, cui consente Aristotele, e che sarà conservata dalla tradizione degli scettici, raccolta più tardi nel libro *Adversus geometras* di Sesto Empirico. Frattanto i filosofi razionalisti, ispirati dalle matematiche — Democrito e Platone — sostenevano, contro gli empirici, la realtà dell'Intelligibili o delle Idee: idea = *idea* significa originariamente schema o figura matematica.

I tentativi per chiarire il concetto generale della linea, nel secolo IV a. C., conducono ad alcune definizioni che ci sono riportate da Platone e Aristotele: definizione genetica della linea come luogo d'un punto che si muove, e definizione delle linee come termini delle superficie. La prima si ritrova in Proclo (ed. Friedlein 1873, p. 97) e in Pappo (ed. Hultsch, 1877, II, p. 662). La seconda figura negli *Elementi di Euclide* (I, 6) come complemento alla I, 2 (le linee sono lunghezze senza larghezza) che, nella sua forma negativa, sta a ricordare e riassumere il risultato della già accennata polemica eleatico-pitagorica.

Le anzidette definizioni sono passate nell'insegnamento tradizionale della geometria; ma anche prima di arrivare alla critica contemporanea, il pensiero matematico doveva riconoscerne l'imprecisione e l'insufficienza. Così nell'*Encyclopédie* (nuova ed., IX, Ginevra 1777, p. 758), D'Alembert dice che la linea è un concetto fondamentale non ulteriormente spiegabile: per chiarire questo concetto generale conviene assumere come data la nozione di linee e superficie particolari, cioè della retta, del piano, ecc.

L'intero sviluppo delle matematiche moderne conduce a tale chiarimento. Ed in questo figura come essenziale il metodo della geometria analitica di Fermat e Descartes (*La géométrie*, 1637).

Riferiamoci per semplicità alla geometria del piano, e assumiamo in questo un sistema di assi cartesiani x, y (v. COORDINATE). La generazione meccanica della curva porta ad esprimere le coordinate d'un suo punto variabile come funzioni d'un parametro t (tempo):

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

I could give here several other ways of tracing and conceiving a series of curved lines, each curve more complex than any preceding one,¹⁹⁴ but I think the best way to group together all such curves and then classify them in order, is by recognizing the fact that all points of those curves which we may call "geometric," that is, those which admit of precise and exact measurement, must bear a definite relation¹⁹⁵ to all points of a straight line, and that this relation must be expressed by means of a single equation.¹⁹⁶ If this equation contains no term of higher degree than the rectangle of two unknown quantities, or the square of one, the curve belongs to the first and simplest class,¹⁹⁷ which contains only the circle, the parabola, the hyperbola, and the ellipse; but when the equation contains one or more terms of the third or fourth degree¹⁹⁸ in one or both of the two unknown quantities¹⁹⁹ (for it requires two unknown quantities to express the relation between two points) the curve belongs to the second class; and if the equation contains a term of the fifth or sixth degree in either or both of the unknown quantities the curve belongs to the third class, and so on indefinitely.

¹⁹⁴ "Qui seroient de plus en plus composées par degré à l'infini." The French quotations in the footnotes show a few variants in style in different editions.

¹⁹⁵ That is, a relation exactly known, as, for example, that between two straight lines in distinction to that between a straight line and a curve, unless the length of the curve is known.

¹⁹⁶ It will be recognized at once that this statement contains the fundamental concept of analytic geometry.

¹⁹⁷ "Du premier & plus simple genre," an expression not now recognized. As now understood, the order or degree of a plane curve is the greatest number of points in which it can be cut by any arbitrary line, while the class is the greatest number of tangents that can be drawn to it from any arbitrary point in the plane.

¹⁹⁸ Grouped together because an equation of the fourth degree can always be transformed into one of the third degree.

¹⁹⁹ Thus Descartes includes such terms as x^2y , x^2y^2 , . . . as well as x^3 , y^4 , . . .

du moins que des sections coniques, ny ce qui peut empêcher, qu'on ne conçoive la seconde, & la troisieme, & toutes les autres, qu'on peut décrire, aussy bien que la première, ny par conséquent qu'on ne les reconnoisse toutes en mesme façon, pour servir aux spéculations de Geometrie.

Je pourrais mettre icy plusieurs autres moyens pour tracer & concevoir des lignes courbes, qui seroient de plus en plus composées par degrés à l'infini. mais pour comprendre ensemble toutes celles, qui sont en la nature, & les distinguer par ordre en certains genres, ie ne sçache rien de meilleur que de dire que tous les points, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'est à dire qui tombent sous quelque mesure précise & exacte, ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par quelque equation, en tous par vne mesme. Et que lorsque cete equation ne monte que jusques au rectangle de deux quantités indeterminées, ou bien au carré d'une mesme, la ligne courbe est du premier & plus simple genre, dans lequel il ny a que le cercle, la parabole, l'hyperbole, & l'Ellipse qui soient comprises. mais que lorsque l'equation monte jusques à la trois ou quatrieme dimension des deux, ou de l'une des deux quantités indeterminées, car il en faut deux pour expliquer icy le rapport d'un point à un autre, elle est du second; & que lorsque l'equation monte jusques à la 5 ou sixieme dimension, elle est du troisieme; & ainsi des autres à l'infini.

Comme si ie veux sçavoir de quel genre est la ligne EC, que j' imagine être décrite par l'intersection de la règle.



Descartes
1596 - 165

Teorema di incompletezza di Gödel.

In ogni sistema assiomatico matematico ci sono proposizioni che non possono ne essere provate ne confutate all'interno degli assiomi del sistema.



Gödel 1906-1978

In particolare non é possibile provare
la consistenza degli assiomi
Si pone fine ai tentativi di determinare
assiomi generali che determinino
tutta la matematica.
La matematica non é un oggetto finito,
un computer non potrà mai essere
programmato per risolvere tutti
i problemi matematici.

(Prova dell'esistenza di Dio, Gödel - 1970.

Proof

Axiom 1. (Dichotomy) A property is positive if and only if its negation is negative.

Axiom 2. (Closure) A property is positive if it necessarily contains a positive property.

Theorem 1. A positive property is logically consistent (i.e., possibly it has some instance.)

Definition. Something is God-like if and only if it possesses all positive properties.

Axiom 3. Being God-like is a positive property.

Axiom 4. Being a positive property is (logical, hence) necessary.

Definition. A property P is the essence of x if and only if x has P and P is necessarily minimal.

Theorem 2. If x is God-like, then being God-like is the essence of x.

Definition. NE(x) means x necessarily exists if it has an essential property.

Axiom 5. Being NE is God-like.

Theorem 3. Necessarily there is some x such that x is God-like.

(qed)