Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA A

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $V = \mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard e della base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ e delle relative coordinate ortonormali (x, y, z). Si consideri la forma quadratica

$$Q_a(xe_1 + ye_2 + ze_3) = Q_a(x, y, z) = -ax^2 + 2y^2 + 2(a+1)xz + az^2$$

(i) Detta M_a la matrice di Q_a rispetto alla base canonica, si discuta la segnatura di M_a al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Posto $a = 3$ si scrivano, se esistono, una matrice C ortogonale e una matrice D diagonale tali che ${}^tCM_3C = D$. In caso negativo dimostrare che non esistono.

Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo reale su V e si consideri la quadrica

$$\mathcal{Q}_a := \{P = (x, y, z) |\ Q_a(x, y, z) - a + 1 = 0\}$$

(iii) Si determini l'insieme $D := \{a \in \mathbb{R} | \mathcal{Q}_a \text{ è degenere}\}$ e si discuta il tipo euclideo della quadrica $\mathcal{Q}_a$ per $a \in \mathbb{R} \setminus D$.

Svolgimento Esercizio 1.

(i) La matrice associata a Q_a rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è la matrice

$$M_a := \begin{pmatrix} -a & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Utilizziamo il principio dei minori principali per studiare la segnatura della matrice M_a. Partiamo dall'entrata in posizione $(2, 2)$;

- $\det(2) = 2 > 0 \Rightarrow$ Segnatura: $(1, 0)$;
- $\det \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2a \Rightarrow$ Segnatura: $\begin{cases} (1,1) & a > 0 \\ (2,0) & a < 0 \end{cases}$
- $\det(M_a) = -2(2a^2 + 2a + 1) < 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ quindi la segnatura è $(2, 1)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Per quanto riguarda il caso $a = 0$ osserviamo che, dal momento che $\det(M_0) < 0$, la forma è non degenere e che il determinante ha segno opposto rispetto a quello del primo minore considerato. Questo ci permette di concludere che sia l'indice di positività che quello di negatività è aumentato di 1, pertanto anche per $a = 0$ avremo segnatura $(2, 1)$.

(ii) Per $a = 3$ otteniamo

$$M_3 := \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamone lo spettro:

$$\det(M_3 - tI) = \det\begin{pmatrix} -3-t & 0 & 4 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 4 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = (2-t)\det\begin{pmatrix} -3-t & 4 \\ 4 & 3-t \end{pmatrix} =$$
$$= (2-t)((-3-t)(3-t)-16) = (2-t)(t-5)(t+5).$$

Lo spettro è quindi $\mathrm{Sp} := \{2, 5, -5\}$. Calcoliamo una base per ciascun autospazio:

$$V_2 := \ker\begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 := \langle v_2 \rangle$$

$$V_5 := \ker\begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad V_5 := \langle v_5 \rangle$$

$$V_{-5} := \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{-5} := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V_{-5} := \langle v_{-5} \rangle$$

Normalizziamo quindi i vettori trovati, per trovare una base ortonormale di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_2' := v_2, \qquad v_5' := \frac{1}{\sqrt{5}} v_5, \qquad v_{-5}' := \frac{1}{\sqrt{5}} v_{-5}.$$

Detta quindi $b := \{v_2', v_5', v_{-5}'\}$ la matrice C cercata è

$$C = M_{e,b}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{pmatrix}.$$

(iii) Consideriamo la matrice associata alla quadrica $\mathcal{Q}_a$:

$$\hat{M}_a := \left(\begin{array}{c|ccc} -a+1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -a & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & a \end{array}\right);$$

osserviamo che la matrice 3×3 messa in evidenza in basso a destra corrisponde alla matrice M_a studiata nei punti precedenti.

Sappiamo già che M_a ha rango massimo per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$, pertanto $\hat{M}_a$ è degenere se e solo se $a = 1$.

Le quadriche euclidee non degeneri in $\mathbb{R}^3$ sono classificate tramite la segnatura, quindi ci sarà sufficiente studiare la segnatura di $\hat{M}_a$ per determinare il tipo euclideo della quadrica $\mathcal{Q}_a$ per $a \neq 1$. Sfruttando quanto fatto nei punti precedenti, possiamo concludere che

$$\mathrm{Sgn}(\hat{M}_a) = \begin{cases} (3,1) & a < 1 \\ (2,2) & a > 1 \end{cases}$$

Quindi avremo che $\mathcal{Q}_a$ è un iperboloide ellittico per $a < 1$, mentre è un iperboloide iperbolico per $a > 1$.

Esercizio 2. Si consideri nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la cubica proiettiva $\mathcal{C}_k$ definita dal polinomio in coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$

$$F_k(x_0, x_1, x_2) = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + k(x_0 + x_1 + x_2)^3,$$

con $k \in \mathbb{C}$.

(i) Si dimostri che la curva $\mathcal{C}_k$ è non-singolare tranne che per due valori di $k \in \mathbb{C}$.

(ii) Dopo aver verificato che i valori cui ci si riferisce nel punto precedente sono $k = -1$ e $k = -1/9$, si stabilisca che tipo di cubica è $\mathcal{C}_k$ per tali valori eccezionali e si calcolino le tangenti principali ai punti singolari.

(iii) Si dimostri che le rette $r\colon x_0 + x_1 = 0$ e $s\colon x_0 + x_2 = 0$ sono rette inflessionali per $\mathcal{C}_k$ per ogni $k \in \mathbb{C}$.

Svoglimento Esercizio 2.

(i) Calcoliamo le derivate parziali di F rispetto alle tre variabili:

$$\begin{aligned} F_0(x_0, x_1, x_2) &= 3x_0^2 + 3k(x_0 + x_1 + x_2)^2 \\ F_1(x_0, x_1, x_2) &= 3x_1^2 + 3k(x_0 + x_1 + x_2)^2 \\ F_2(x_0, x_1, x_2) &= 3x_2^2 + 3k(x_0 + x_1 + x_2)^2. \end{aligned}$$

Imponendo l'annullamento delle tre derivate parziali, otteniamo $x_0^2 = x_1^2 = x_2^2$.

Osserviamo che $x_0 = 0$ implicherebbe $x_1 = x_2 = 0$, quindi possiamo supporre $x_0 = 1$. A questo punto le possibilità sono:

- $[x_0, x_1, x_2] = [1, 1, 1]$: per il quale $k = -1/9$.
- $[x_0, x_1, x_2] \in \{[1, 1, -1], [1, -1, 1], [1, -1, -1]\}$ per i quali $k = -1$.

I due valori eccezionali sono dunque $k = -1/9$ per il quale la curva ha un unico punto singolare e $k = -1$ per il quale la curva ha tre punti singolari.

(ii) Poniamo $k = -1/9$. La cubica ha quindi equazione

$$F_{-1/9}(x_0, x_1, x_2) = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - \frac{1}{9}(x_0 + x_1 + x_2)^3$$

e il suo unico punto singolare è $[1, 1, 1]$. Deomogeneizziamo l'equazione, scrivendola in coordinate affini $x := x_1/x_0$ e $y := x_2/x_0$.

$$f_{-1/9}(x, y) = 1 + x^3 + y^3 - \frac{1}{9}(1 + x + y)^3.$$

Dovendo studiare la natura del punto $(1, 1)$ e le tangenti principali alla curva in tale punto, studiamo la curva definita da

$$\begin{aligned} g(x, y) = f_{-1/9}(x + 1, y + 1) &= 1 + (x + 1)^3 + (y + 1)^3 - \frac{1}{9}(1 + (x + 1) + (y + 1))^3 = \\ &= \frac{8}{9}x^3 - \frac{x^2 y}{3} - \frac{xy^2}{3} + \frac{8}{9}y^3 + 2x^2 - 2xy + 2y^2 \end{aligned}$$

nel punto $(0, 0)$. Esso è un punto doppio e le sue tangenti principali sono date dalla scomposizione in termini lineari della parte di secondo grado del polinomio $g(x, y)$:

$$x^2 - xy + y^2 = (y + \omega^2 x)(y + \omega^4 x),$$

dove $\omega := e^{i\pi/3}$.

Quindi il punto $(1,1)$ è un punto doppio e le sue tangenti principali sono le rette

$$r_1\colon y + \omega^2 x = \omega$$
$$r_2\colon y + \omega^4 x = \omega^5$$

Omogeneizzando, otteniamo le tangenti principali al punto $[1,1,1]$:

$$r_1\colon x_2 + \omega^2 x_1 = \omega x_0$$
$$r_2\colon x_2 + \omega^4 x_1 = \omega^5 x_0$$

Poniamo ora $k = -1$; abbiamo osservato nel punto precedente che per tale valore di k abbiamo trre punti singolari: $P_1 := [1,1,-1]$, $P_2 = [1,-1,1]$, $P_3 := [-1,1,1]$.

Dal momento che sono punti singolari, ogni retta passante per tali punti interseca la curva con molteplicità di intersezione maggiore o uguale a 2. Pertanto indicando con $r_{12}\colon x_1 + x_2 = 0$ la retta passante per P_1 e P_2 avremo

$$\sum_{P \in r_{12}} I(\mathcal{C}_{-1}, r_{12}; P) \geq 4.$$

Per il Teorema di Bezout, possiamo concludere che la retta r_{12} è componente di $\mathcal{C}_1$. Ripetendo lo stesso ragionamento per le rette $r_{13}\colon x_0 + x_2 = 0$ e $r_{23}\colon x_0 + x_1 = 0$, deduciamo che $\mathcal{C}_{-1}$ è l'unione di tre rette:

$$F_{-1}(x_0, x_1, x_2) = -3(x_0 + x_2)(x_0 + x_1)(x_1 + x_2).$$

(iii) Troviamo le intersezioni della retta $r\colon x_0 + x_1 = 0$ con la cubica $\mathcal{C}_k$:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + k(x_0 + x_1 + x_2)^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ (x_0 + x_1)(x_0^2 - x_0 x_1 + x_1^2) + x_2^3 + k(x_0 + x_1 + x_2)^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ (k+1)x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Come già osservato nel punto precedente, se $k = -1$ la retta è componente della cubica, pertanto è tangente principale a $\mathcal{C}_{-1}$ in ogni suo punto. É sufficiente considerarne un punto liscio (un qualsiasi punto su di essa diverso da $[1,-1,1]]$ e $[-1,1,1]$) per concludere che la retta è tangente inflessionale per $\mathcal{C}_{-1}$.

Supponendo ora $k \neq -1$, l'unico punto di intersezione tra r e $\mathcal{C}_k$ è il punto $P := [1,-1,0]$. Calcoliamo quindi $I(\mathcal{C}_k, r; P)$.

Deomogeneizziamo rispetto a x_0 la retta e la curva:

$$r(x,y)\colon 1 + x = 0$$
$$f_k(x,y)\colon 1 + x^3 + y^3 + k(1 + x + y)^3$$

Parametrizziamo la retta r come

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = t \end{cases}$$

e studiamo l'ordine di annullamento della radice $t = 0$ in $f_k(-1,t)$:

$$f_k(-1,t) = 1 + (-1)^3 + t^3 + k(1 - 1 + t)^3 = (k+1)t^3.$$

Dal momento che $k \neq -1$, concludiamo che $I(\mathcal{C}_k, r; P) = 3$, quindi la retta r è tangente inflessionale per $\mathcal{C}_k$.

Ragionamenti del tutto analoghi ci permettono di concludere che, detto $Q := [1,0,-1]$ e $s\colon x_0 + x_2 = 0$, vale $I(\mathcal{C}_k, s; Q) = 3$ per $k \neq -1$ e $I(\mathcal{C}_{-1}, s; Q) = \infty$.