Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2023/2024
Primo appello - 12 giugno 2024

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano Euclideo. Si considerino le seguenti quadruple di punti:

$$A = (3,1), \qquad B = (1,3), \qquad C = (0,-2), \qquad M = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right),$$
$$A' = (2,2), \qquad B' = (0,0), \qquad C' = (5,-1), \qquad M' = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

(1) Dimostrare che le terne $\{A, B, C\}$ e $\{A', B', C'\}$ sono affinemente indipendenti;

(2) Dimostrare che esiste un'unica affinità $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ tale che $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ e $f(M) = M'$ (*hint: si noti che M è il baricentro del triangolo di vertici A, B, C ed M' è il baricentro del triangolo di vertici A', B', C'*);

(3) Costruire esplicitamente la matrice $\mathcal{M}$ tale che $f(P) = \mathcal{M}(P - B) + B'$. Dire se l'affinità f trovata è una isometria e se ha punti fissi;

(4) Sia r la retta passante per A' e B' e s la retta passante per B e C. Sia P il punto di intersezione tra r e s. Sia t e la retta passante per A e per B. Calcolare la distanza tra P e t;

(5) Dire se può esistere una isometria $g\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ che manda t nella retta $y = 0$ e tale che $g(P) = P$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ il piano proiettivo complesso. Si consideri la famiglia di cubiche proiettive $\mathcal{C}_\lambda \subset \mathbb{P}^2$ date dall'equazione:

$$\mathcal{C}_\lambda\colon \quad F_\lambda(x_0, x_1, x_2) = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3\lambda x_0 x_1 x_2 = 0,$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

(1) Dimostrare che non esistono punti singolari $P = [x_0, x_1, x_2] \in \mathcal{C}_\lambda$ tali che $x_0 x_1 x_2 = 0$;

(2) Verificare che la cubica $\mathcal{C}_1$ è non-singolare e trovare le coordinate omogenee dei suoi nove punti di flesso;

(3) Trovare gli asintoti di $\mathcal{C}_\lambda$;

(4) Dimostrare che la traccia affine di $\mathcal{C}_{-1}$, ottenuta deomogenizzando rispetto a x_0, è riducibile (*hint: verificare che contiene gli asintoti del punto (3)*).

Soluzione Esercizio 1. (1) Consideriamo i vettori:

$$v_1 = A - B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \; v_2 = C - B = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = A' - B' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; w_2 = C' - B' = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le famiglie $\{v_1, v_2\}$ e $\{w_1, w_2\}$ sono linearmente indipendenti, in quanto:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = -12 \neq 0, \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -12 \neq 0.$$

Pertanto, le triple sono affinemente indipendenti, come richiesto.

(2) Si noti che le triple A, B, C e A', B', C' sono affinemente indipendenti, dunque esiste un'unica affinità f tale che $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Il punto M è il baricentro del triangolo di vertici A, B e C, dunque $f(M)$ sarà il baricentro del triangolo di vertici A', B' e C'. Poiché questo baricentro è proprio uguale a M', si ha che $f(M) = M'$, e quindi concludiamo affermativamente.

(3) Costruiamo esplicitamente l'affinità f. Scriviamo $f(P) = \varphi(P - B) + B'$, dove φ è la parte lineare univocamente determinata da f e B. Sia $\mathcal{M}$ la matrice associata a φ nella base canonica:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} | & | \\ c_1 & c_2 \\ | & | \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Si ha che:

$$\begin{aligned} \varphi(A - B) = A' - B' &\rightsquigarrow 2c_1 - 2c_2 = (2, 2)^T, \\ \varphi(C - B) = C' - B' &\rightsquigarrow -c_1 - 5c_2 = (5, -1)^T, \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} -12c_2 = (12, 0)^T &\rightsquigarrow c_2 = (-1, 0)^T, \\ c_1 = c_2 + (1, 1)^T &\rightsquigarrow c_1 = (0, 1)^T. \end{aligned}$$

In definitiva, la matrice $\mathcal{M}$ ha la forma:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi si ha che:

$$f(x, y) = \mathcal{M} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 3 \end{pmatrix} + (0, 0) = (3 - y, x - 1)$$

Visto che le colonne di $\mathcal{M}$ sono ortonormali, f è una isometria. Un punto $P = (x, y)$ è fissato da f se e solo se:

$$f(x, y) = (x, y) \iff \begin{cases} x = 3 - y \\ y = x - 1 \end{cases} \iff (x, y) = (2, 1).$$

Concludendo, f è un'isometria con un solo punto fisso, cioè una rotazione, il cui centro è dato da $\mathcal{O} = (2,1)$. Inoltre, $A = \mathcal{O} + (1,0)^T$ e $f(A) = \mathcal{O} + (1,0)^T$, dunque f è una rotazione di $\pi/2$ attorno al centro $\mathcal{O}$.

(4) Il punto P appartiene alla retta passante per A' e B'. Poiché f è una rotazione di $\pi/2$, questa retta è ortogonale alla retta per i punti A e B. Da questo si deduce che A' è la proiezione ortogonale del punto P sul segmento di estremi A e B, e dunque la distanza di P dal segmento è uguale alla distanza di P da A'.
Troviamo il punto P. La retta r ha equazione:

$$r\colon \quad \frac{y-0}{x-0} = \frac{2-0}{2-0} \rightsquigarrow y = x,$$

mentre la retta s ha equazione:

$$s\colon \quad \frac{y-(-2)}{x-0} = \frac{3-(-2)}{1-0} \rightsquigarrow y = 5x - 2,$$

da cui si ha che $P = (x,y)$ soddisfa il sistema lineare:

$$r \cap s\colon \begin{cases} 5x - 2 = x \\ y = x \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Per quanto detto sopra, la distanza tra P e il segmento di estremi A e B è data da:

$$\mathrm{d}(P, A') = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Alternativamente, la retta t per A e per B ha equazione:

$$t\colon \quad \frac{y-1}{3-1} = \frac{x-3}{1-3} \quad \rightsquigarrow \quad x + y - 4 = 0.$$

Usando la formula della distanza punto-iperpiano, si ha che:

$$\mathrm{d}(P,t) = \frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 4\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

(5) Supponiamo che una tale isometria g esista. Allora:

$$\frac{1}{2} = \mathrm{d}(P, \{y=0\}) = \mathrm{d}(g(P), g(\{y=0\})) = \mathrm{d}(P,t) = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

una contraddizione. Dunque una tale g non esiste.

Soluzione Esercizio 2. (1) Il sistema di equazioni per trovare le singolarità di $\mathcal{C}_\lambda$ è dato da F_λ e dalle sue derivate parziali $F_{\lambda,i} := \partial F_\lambda / \partial x_i$ per ogni $i \in \{0,1,2\}$:

$$\begin{cases} x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3\lambda x_0 x_1 x_2 = 0 \\ F_{\lambda,0}(x_0,x_1,x_2) = 3\left(x_0^2 + \lambda x_1 x_2\right) = 0 \\ F_{\lambda,1}(x_0,x_1,x_2) = 3\left(x_1^2 + \lambda x_0 x_2\right) = 0 \\ F_{\lambda,2}(x_0,x_1,x_2) = 3\left(x_2^2 + \lambda x_0 x_1\right) = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3\lambda x_0 x_1 x_2 = 0 \\ x_0^2 = -\lambda x_1 x_2 \\ x_1^2 = -\lambda x_0 x_2 \\ x_2^2 = -\lambda x_0 x_1 \end{cases} . \quad (\star)$$

Supponiamo per assurdo che $P = [x_0, x_1, x_2]$ sia un punto singolare tale che $x_0 = 0$. Allora, dalle equazioni del sistema $(\star)$, si ottiene che $x_1 = x_2 = 0 = x_0$, una contraddizione, poiché P è un punto del proiettivo. Allo stesso modo, supponendo per assurdo che $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$, si ottiene che $x_0 = x_1 = x_2 = 0$. Pertanto, non esistono punti singolari P di $\mathcal{C}_{[\lambda,1]}$ tali che $x_0x_1x_2 = 0$.

(2) I punti di flesso di $\mathcal{C}_1$ sono i punti non-singolari che annullano il determinante Hessiano $\mathscr{H}_F$, dove $F = F_1$. La cubica è data dall'equazione:

$$\mathcal{C}_1: \quad F(x_0, x_1, x_2) = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_0x_1x_2 = 0,$$

Troviamo il gradiente di F per verificare che non ha punti singolari. Otteniamo il sistema $(\star)$ di sopra, con $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_0x_1x_2 = 0 \\ x_0^2 = -x_1x_2 \\ x_1^2 = -x_0x_2 \\ x_2^2 = -x_0x_1 \end{cases} . \tag{$\star$}$$

Poiché abbiamo già dimostrato che ogni soluzione di $(\star)$ è tale che $x_0x_1x_2 \neq 0$, possiamo assumere $x_0 = 1$ e dividere la terza equazione per la seconda, in modo da ottenere:

$$x_1^2 = 1/x_1 \quad \rightsquigarrow \quad x_1^3 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = \omega,\ \omega^3 = 1.$$

La terza equazione implica che $x_2 = -\omega^2$. Sostituendo nella prima equazione, però:

$$1 + \omega^3 + (-\omega^2)^3 + 3\omega(-\omega^2) = 1 + 1 - 1 - 3 = -2 \neq 0,$$

quindi il sistema $(\star)$ non ha soluzione. Concludiamo che non ci sono punti singolari.

Facendo i conti, il determinante Hessiano ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_F([x_0, x_1, x_2]) = \det \begin{pmatrix} 6x_0 & 3x_2 & 3x_1 \\ 3x_2 & 6x_1 & 3x_0 \\ 3x_1 & 3x_0 & 6x_2 \end{pmatrix} &= 27 \det \begin{pmatrix} 2x_0 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 2x_1 & x_0 \\ x_1 & x_0 & 2x_2 \end{pmatrix} \\ &= 27(8x_0x_1x_2 + 2x_0x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_0^2 - 2x_2^2) \\ &= 54(5x_0x_1x_2 - (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)) \end{aligned}$$

Dunque i punti di flesso saranno dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_0x_1x_2 = 0 \\ 5x_0x_1x_2 - \left(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3\right) = 0 \end{cases} . \tag{$\star\star$}$$

Sommando le due equazioni otteniamo la condizione:

$$8x_0x_1x_2 = 0.$$

Abbiamo tre casi. Supponiamo che $x_0 = 0$. La prima equazione di $(\star\star)$ diventa:

$$x_1^3 + x_2^3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = \omega x_2,\ \omega^3 = -1.$$

Denotiamo con $1, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ le tre soluzioni complesse distinte dell'equazione $z^3 + 1 = 0$. Allora, i primi tre punti di flesso saranno:

$$P_{00} = [0, -1, 1], \quad P_{01} = [0, \omega_1, 1], \quad P_{02} = [0, \omega_2, 1].$$

Poiché il sistema è simmetrico rispetto a permutazioni delle variabili omogenee x_0, x_1, x_2, possiamo ripetere gli stessi passaggi per $x_1 = 0$, ottenendo i flessi:

$$P_{10} = [-1, 0, 1], \quad P_{11} = [\omega_1, 0, 1], \quad P_{12} = [\omega_2, 0, 1]$$

mentre per $x_2 = 0$ otteniamo gli ultimi tre punti di flesso:

$$P_{20} = [-1, 1, 0], \quad P_{21} = [\omega_1, 1, 0], \quad P_{22} = [\omega_2, 1, 0].$$

(3) Gli asintoti si ottengono deomogenizzando le tangenti proiettive a $\mathcal{C}_\lambda$ nei punti all'infinito. Calcoliamo, pertanto, prima i punti all'infinito. Questi si ottengono intersecando $\mathcal{C}_\lambda$ con la retta all'infinito $x_0 = 0$, da cui si ottiene:

$$\mathcal{C}_\lambda \cap \{x_0 = 0\}: \qquad x_1^3 + x_2^3 = 0,$$

e quindi si ha che i punti all'infinito sono:

$$P_\infty = [0, 1, -1],\ Q_\infty = [0, 1, \omega_1],\ R_\infty = [0, 1, \omega_2],$$

dove $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ sono come al punto precedente. Da questo, otteniamo le tre tangenti proiettive:

$$\begin{aligned}
p_\infty: &\qquad -3\lambda x_0 + 3x_1 + 3x_2 = 0,\\
q_\infty: &\qquad 3\lambda\omega_1 x_0 + 3x_1 + 3\omega_1^2 x_2 = 0,\\
r_\infty: &\qquad 3\lambda\omega_2 x_0 + 3x_1 + 3\omega_2^2 x_2 = 0,
\end{aligned}$$

che, deomogenizzando, danno vita ai 3 asintoti:

$$\begin{aligned}
a_\infty: &\qquad y = -x + \lambda,\\
b_\infty: &\qquad y = \omega_1 x + \lambda\omega_1^2,\\
c_\infty: &\qquad y = \omega_2 x + \lambda\omega_2^2.
\end{aligned}$$

(4) Come da suggerimento, sia:

$$r_\omega: \qquad y = \omega x - \omega^2$$

l'asintoto relativo al punto all'infinito $[0, 1, \omega]$, $\omega^3 = -1$. Dimostriamo che il sistema:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy + 1 = 0 \\ y = \omega x - \omega^2 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni. Infatti, sostituendo la seconda equazione nella prima, si ottiene:

$$x^3 + (\omega x - \omega^2)^3 - 3x(\omega x - \omega^2) + 1 = \cancel{x^3} \cancel{- x^3} \cancel{- 3\omega^4 x^2} \cancel{+ 3\omega^5 x} + \cancel{(-\omega^2)^3} \cancel{- 3\omega x^2} \cancel{+ 3\omega^2 x} + \cancel{1} = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{C}$, da cui la retta r_ω è contenuta nella traccia affine di $\mathcal{C}_{-1}$ per ogni $\omega \in \mathbb{C}$ tale che $\omega^3 = -1$. Ne segue, poiché quest'ultima è una cubica, che essa è unione di queste tre rette.