Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2019/2020
26 maggio 2020 - Prova Intermedia

Il candidato dovrà svolgere l'esercizio 1 e l'esercizio 2.
Il tempo per la prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ la base canonica. Si definisca la forma bilineare simmetrica $b_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, al variare del parametro reale k in modo che:

- $b_k(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) = 2$;
- $b_k(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}) = b_k(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_3}) = k + k^2$;
- $\boldsymbol{e_1} \in \langle \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3} \rangle^\perp$;
- $b_k(\boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{e_3}) = 2 + k + 9k^2$.

(i) Si scriva la matrice A_k associata alla forma bilineare b_k rispetto la base $\mathcal{E}$ e si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, la forma bilineare b_k risulta degenere. Si stabilisca, inoltre, la segnatura di A_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Si trovino al variare di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, una matrice $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ortogonale ed una matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ per cui ${}^tMA_kM = D$.

(iii) Sia $k = 2$. Dopo aver verificato che in questo caso b_2 rappresenta un prodotto scalare, trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a tale prodotto scalare.

Soluzione dell'Esercizio 1. (i) Per poter scrivere la matrice A_k, dobbiamo stabilire il valore di $b_k(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j})$ con $1 \leq i \leq j \leq 3$. Dalla terza condizione sappiamo che

$$b_k(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) = b_k(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}) = 0.$$

Per ricavare il valore di $b_k(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$, scriviamo esplicitamente l'ultima relazione:

$$\begin{aligned} 2 + k + 9k^2 = b_k(\boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{e_3}) &= b_k(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) + 4b_k(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}) + \\ &+ b_k(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_3}) + 4b_k(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) - 2b_k(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}) - 4b_k(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}) = \\ &= 2 + 4(k + k^2) + (k + k^2) - 4b_k(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la simmetria di b_k e le informazioni ottenute fino a questo punto. Invertendo questa ultima relazione otteniamo che

$$b_k(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}) = \frac{1}{4}\left(2 + 5k^2 + 5k - 2 - k - 9k^2\right) = -k^2 + k.$$

Possiamo quindi scrivere la matrice A_k, come

$$\boxed{A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k+k^2 & k-k^2 \\ 0 & k-k^2 & k+k^2 \end{pmatrix}}.$$

Per stabilire i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui b_k è degenere, è sufficiente studiare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k ha determinante nullo. Esso è uguale a (sviluppando secondo la prima riga):

$$\det(A_k) = 2\left[(k+k^2)^2 - (k-k^2)^2\right] = 2(k+k^2+k-k^2)(k+k^2-k+k^2) = 8k^3,$$

per cui $\boxed{b_k \text{ è non degenere se e solo se } k \neq 0}$.
Infine, per trovare la segnatura di A_k, studiamo il segno dei suoi autovalori e per fare ciò calcoliamo il suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} P_{A_k}(\lambda) = \det &\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & k+k^2-\lambda & k-k^2 \\ 0 & k-k^2 & k+k^2-\lambda \end{pmatrix}\right) = \\ &= (2-\lambda)\left[\left(k+k^2-\lambda\right)^2 - (k-k^2)^2\right] = \\ &= (2-\lambda)\left(k+k^2-\lambda+k-k^2\right)\left(k+k^2-\lambda-k+k^2\right) = \\ &= (2-\lambda)\left(2k-\lambda\right)\left(2k^2-\lambda\right), \end{aligned}$$

quindi i tre autovalori trovati sono:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 2k, \qquad \lambda_3 = 2k^2.$$

Allora la segnatura di A_k è

$$\boxed{\begin{cases} (3,0) & \text{se } k > 0, \\ (2,1) & \text{se } k < 0, \\ (1,0) & \text{se } k = 0. \end{cases}}$$

(ii) Per il teorema spettrale, sappiamo che la matrice M esiste sempre per ogni k. Inoltre, dal punto precedente sappiamo quali sono gli autovalori di A_k ed in particolare:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \text{ se e solo se } k = 1, \\ \lambda_1 = \lambda_3 \text{ se e solo se } k = 1 \lor k = -1, \\ \lambda_2 = \lambda_3 \text{ se e solo se } k = 0 \lor k = 1. \end{cases}$$

Quindi possiamo studiare separatamente i diversi casi:

- <u>Se $k \notin \{-1, 0, 1\}$:</u>

In questo caso i tre autovalori sono distinti e sappiamo già che gli autovettori relativi agli autospazi V_2, V_{2k} e V_{2k^2} sono tra loro ortogonali. In particolare si ha che

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} (k+k^2-2)y + (k-k^2)z = 0 \\ (k-k^2)y + (k+k^2-2)z = 0 \end{cases} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle;$$

$$V_{2k} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} (2-2k)x = 0 \\ (k^2-k)y + (k-k^2)z = 0 \end{cases} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle;$$

$$V_{2k^2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} (2-2k^2)x = 0 \\ (k-k^2)y + (k-k^2)z = 0 \end{cases} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Allora la matrice ortogonale diagonalizzante M è formata dagli autovettori appena trovati normalizzati, cioè

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

e la matrice diagonale D corrisponde alla matrice che possiede tutti gli autovalori sulla diagonale, cioè $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2k^2 \end{pmatrix}}$.

- <u>Se $k = 0$:</u>
  La matrice A_0 in questo caso è

  $$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  e risulta già diagonale, allora $\boxed{D = A_0 \text{ e } M = I}$.
- <u>Se $k = 1$:</u>
  Anche in questo caso abbiamo che

  $$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  è già in forma diagonale e $\boxed{D = A_1 \text{ e } M = I}$.
- <u>Se $k = -1$:</u>
  La matrice in questo caso è

  $$A_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

in questo caso $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$ e $\lambda_2 = -2$, quindi dobbiamo solo trovare una base ortogonale per l'autospazio V_2, che deve avere dimensione 2, mentre sappiamo già che $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore per V_{-2}. Allora

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2y + 2z = 0 \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

e questi due autovettori della base sono ortogonali per costruzione. Allora la matrice

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

è tale per cui ${}^tMA_{-1}M = \boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$.

(iii) Nel primo punto abbiamo già visto che se $k = 2$, la segnatura di A_2 è $(3, 0)$, allora esso rappresenta un prodotto scalare. Per trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$, partiamo dalla base canonica $\mathcal{E}$ e rendiamola ortogonale utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt. Per la definizione di b_2, sappiamo che $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{e_1}$ e $\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{e_2}$ sono già ortogonali tra di loro, mentre

$$\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{e_3} - \frac{b_2(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3})}{b_2(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1})}\boldsymbol{e_1} - \frac{b_2(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})}{b_2(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2})}\boldsymbol{e_2} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi la base $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Per trovare una base ortonormale è sufficiente dividere ognuno dei vettori di $\mathcal{V}$ per la sua norma rispetto al prodotto scalare definito da b_2, allora

$$b_2(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}) = 2 \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{w_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};}$$

$$b_2(\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_2}) = 6 \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix};}$$

$$b_2(\boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_3}) = \frac{16}{3} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.}$$

Quindi una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$ rispetto a b_2 è data da $\mathcal{W} = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3}\}$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ il piano proiettivo complesso di coordinate $[x_0, x_1, x_2]$ e sia $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ il piano affine complesso di cordinate (x, y). Si considerino inoltre le rette proiettive $U_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_0 = 0\}$ e $U_1 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_1 = 0\}$ e le relative funzioni di proiettivizzazione

$$\begin{aligned} j_0 : \mathbb{A}^2 &\to \mathbb{P}^2 \setminus U_0 \qquad\qquad & j_1 : \mathbb{A}^2 &\to \mathbb{P}^2 \setminus U_1 \\ (x, y) &\mapsto [1, x, y] & (x, y) &\mapsto [x, 1, y]. \end{aligned}$$

Si definisca su $\mathbb{A}^2$ la curva $\mathcal{C}_{a,b}$ definita dal polinomio

$$f_{a,b}(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + ax^2 + by^2 = 0$$

al variare di a, $b \in \mathbb{C}$.

(i) Si trovino i punti singolari di $\mathcal{C}_{a,b}$. Si verifichi inoltre che se $a = 0$, se $b = 0$, oppure se $a = b$ la curva risulta riducibile, trovando le sue componenti irriducibili.

(ii) Si classifichino i punti singolari, calcolando la molteplicità di $\mathcal{C}_{a,b}$ in suddetti punti e si trovino le tangenti principali. Infine si calcoli la molteplicità di intersezione tra le tangenti principali e la curva $\mathcal{C}_{a,b}$ nel punto di tangenza.

Si fissino i valori $a = 2$ e $b = -2$.

(iii) Si verifichi che i punti impropri della curva $\overline{\mathcal{C}} = j_0\left(\mathcal{C}_{2,-2}\right)$ sono singolari. Si trovino le tangenti principali nei punti impropri, studiando la curva $\mathcal{D} = j_1^{-1}\left(\overline{\mathcal{C}}\right)$ e si ricavino le equazioni degli asintoti per $\mathcal{C}_{2,-2}$.

Soluzione dell'Esercizio 2. (i) Per trovare i punti singolari della curva $\mathcal{C}_{a,b}$ è necessario imporre che il gradiente della curva si annulli. Dato che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 + 2ax;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4x^2y + 2by,$$

quindi i punti singolari sono quelli che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 2x^3 + 2xy^2 + ax = x(2x^2 + 2y^2 + a) = 0 \\ 2y^3 + 2x^2y + by = y(2y^2 + 2x^2 + b) = 0. \end{cases}$$

La prima equazione si annulla per $x = 0 \vee 2x^2 + 2y^2 + a = 0$.

- $\underline{x = 0}$:
  Nel primo caso il sistema diventa

  $$\begin{cases} x = 0 \\ y(2y^2 + b) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \vee y = \pm\sqrt{-\frac{b}{2}} \end{cases}$$

  Tuttavia $f_{a,b}\left(0, \pm\sqrt{-\frac{b}{2}}\right) = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} = -\frac{b^2}{2} = 0$ se e solo se $b = 0$, cioè se il punto è nuovamente l'origine. Inoltre in questo caso se $a \neq 0$, il polinomio diventa

  $$\boxed{f_{a,0}(x,y) = (x^2+y^2)^2 + ax^2 = (x^2 + y^2 - i\sqrt{a}x)(x^2 + y^2 + i\sqrt{a}x) = 0,}$$

  risultando appunto $\boxed{\text{riducibile}}$, notando che le due coniche in cui si fattorizza il polinomio sono non degeneri se $a \neq 0$.

- $\underline{2x^2 + 2y^2 + a = 0}$:
  Nel secondo caso il sistema diventa

  $$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + a = 0 \\ y(2y^2 + 2x^2 + b) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = -a \\ y(b - a) = 0 \end{cases}$$

  La seconda equazione ha soluzione se $y = 0$, allora dalla prima otteniamo che $x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$. Analogamente a prima abbiamo però che i punti $\left(\pm\sqrt{-\frac{a}{2}}, 0\right)$ appartengono alla curva se e solo se $a = 0$, ma in questo caso otteniamo che il polinomio $f_{0,b}$ si fattorizza (se $b \neq 0$) come

  $$\boxed{f_{0,b}(x,y) = (x^2+y^2)^2 + by^2 = (x^2 + y^2 - i\sqrt{b}y)(x^2 + y^2 + i\sqrt{b}y) = 0,}$$

  quindi anche in questo caso la curva risulta $\boxed{\text{riducibile}}$.
  Notiamo inoltre che la seconda equazione dell'ultimo sistema è soddisfatta anche per $a = b$, in questo caso il polinomio risulta

  $$f_{a,a}(x,y) = (x^2+y^2)^2 + ax^2 + ay^2 = (x^2+y^2)(x^2+y^2+a) =$$
  $$\boxed{= (x+iy)(x-iy)(x^2+y^2+a) = 0}$$

  e quindi anche in questo caso la curva $\mathcal{C}_{a,a}$ è $\boxed{\text{riducibile}}$.

Ricapitolando, se $a \neq 0$, o $b \neq 0$ o $a \neq b$ la curva è irriducibile e l'unico $\boxed{\text{punto singolare è } O = (0,0)}$; negli altri casi la curva è riducibile

(ii) Per trovare la molteplicità di intersezione nel punto $(0,0)$, controlliamo quali sono i termini di grado più basso del polinomio $f_{a,b}$: se $(a,b) \neq (0,0)$, abbiamo che $\boxed{m_O(\mathcal{C}) = 2.}$

Supponiamo che la curva sia irriduciubile, ovvero che $a \neq b$ e entrambi siano non nulli. In questo caso otteniamo che le tangenti principali alla curva nel punto O sono date dall'annullarsi del termine di grado più basso in $f_{a,b}$, cioè

$$ax^2 + by^2 = (\sqrt{a}x + i\sqrt{b}y)(\sqrt{a}x - i\sqrt{b}y) = 0.$$

Quindi le due tangenti principali sono

$$\boxed{t_1 : \sqrt{a}x + i\sqrt{b}y = 0} \qquad \text{e} \qquad \boxed{t_2 : \sqrt{a}x - i\sqrt{b}y = 0}$$

ed il punto O è quindi un $\boxed{\text{punto doppio ordinario o nodo.}}$ Per calcolare la molteplicità di intersezione $I\left(\mathcal{C}_{a,b}, t_1; O\right)$, scriviamo un'equazione parametrica di t_1, che è data da $\left(-i\sqrt{\frac{b}{a}}t, t\right)$ e calcoliamo il polinomio $f_{a,b}$ in questo valore:

$$\begin{aligned} f_{a,b}\left(-i\sqrt{\frac{b}{a}}t, t\right) &= \frac{b^2}{a^2}t^4 + t^4 - 2\frac{b}{a}t^4 - \frac{b}{a}at^2 + bt^2 = 0 \\ b^2t^4 + a^2t^4 - 2abt^4 &= 0 \\ (b-a)^2t^4 &= 0. \end{aligned}$$

Quindi $t = 0$ è una soluzione di molteplicità 4 del polinomio e, per definizione, $\boxed{I\left(\mathcal{C}_{a,b}, t_1; O\right) = 4.}$ Notiamo che in $f_{a,b}$ le potenze di x compaiono solo in grado pari, allora $f_{a,b}(x,y) = f_{a,b}(-x,y)$ e quindi $\boxed{I\left(\mathcal{C}_{a,b}, t_2; O\right) = 4.}$

(iii) Il polinomio che definisce la curva $\overline{\mathcal{C}} = j_0\left(\mathcal{C}_{2,-2}\right)$ è ottenuto omogeneizzando il polinomio $f_{2,-2}$ rispetto ad x_0, cioè

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_0^2x_1^2 - 2x_0^2x_2^2 = 0.$$

Troviamo quindi adesso i punti impropri, imponendo $x_0 = 0$. Abbiamo quindi che

$$F(0, x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 = 0$$

quindi i punti impropri sono $P_1 = [0,1,i]$ e $P_2 = [0,1,-i]$. Calcoliamo quindi il gradiente rispetto le tre variabili ed otteniamo che

$$\nabla F(x_0, x_1, x_2) = \left(4x_0x_1^2 - 4x_0x_2^2, 4x_1^3 + 4x_1x_2^2 + 4x_0^2x_1, 4x_2^3 + 4x_1^2x_2 + 4x_0^2x_2\right)$$

ed effettuando una semplice sostituzione notiamo che $\nabla F(P_1) = (0,0,0)$ e $\nabla F(P_2) = (0,0,0)$, verificando quindi che i punti all'infinito $\boxed{\text{sono singolari.}}$

Per studiarne le tangenti principali applichiamo la funzione j_1^{-1} e deomogeneizziamo rispetto x_1, $x = \frac{x_0}{x_1}$, $y = \frac{x_2}{x_1}$:

$$\mathcal{D} : g(x, y) = 1 + y^4 + 2y^2 + 2x^2 - 2x^2y^2 = 0$$

ed i punti P_1 e P_2 corrispondono sul piano affine ai punti $j_1^{-1}(P_1) = Q_1 = (0, i)$ e $j_1^{-1}(P_2) = Q_2 = (0, -i)$.

Per trovare quindi le tangenti principali in Q_1 effettuiamo la traslazione che porta Q_1 nell'origine:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - i \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' + i, \end{cases}$$

ottenendo il polinomio

$$g(x', y' + i) = 1 + (y' + i)^4 + 2(y' + i)^2 + 2(x')^2 - 2(x')^2(y' + i)^2 = 0.$$

Per trovare le tangenti dobbiamo quindi annullare i termini di grado più basso in questo polinomio. I termini di grado 0 e di grado 1 sono identicamente nulli in quanto corrispondono a

$$1 + i^4 + 2i^2 = 1 + 1 - 2 = 0 \qquad \text{e} \qquad 4i^3y' + 4iy' = -4iy' + 4iy' = 0,$$

mentre i termini di grado 2 sono

$$6i^2(y')^2 + 2(y')^2 + 2(x')^2 - 2i^2(x') = 4(x')^2 - 4(y')^2,$$

che si annullano solo per $x' = y'$ e $x' = -y'$. Quindi il punto Q_1 ha molteplicità $m_{Q_1}(\mathcal{D}) = 2$ e le sue tangenti principali sono

$$r_1 : x - y + i = 0 \qquad \text{e} \qquad r_2 : x + y - i = 0,$$

dove abbiamo applicato l'affinità inversa per ricavare le equazioni delle rette nelle variabili originali.

Effettuando la traslazione che porta Q_2 nell'origine

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + i \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' - i, \end{cases}$$

è possibile ricavare analogamente che $m_{Q_2}(\mathcal{D}) = 2$ e che le sue tangenti principali sono:

$$t_1 : x - y - i = 0 \qquad \text{e} \qquad t_2 : x + y + i = 0.$$

La chiusura proiettiva di queste rette rispetto la variabile x_1 è

$$\begin{aligned} \overline{r_1} &: x_0 + ix_1 - x_2 = 0 \\ \overline{r_2} &: x_0 - ix_1 + x_2 = 0 \\ \overline{t_1} &: x_0 - ix_1 - x_2 = 0 \\ \overline{t_2} &: x_0 + ix_1 + x_2 = 0 \end{aligned}$$

Per trovare gli asintoti di $\mathcal{C}_{2,-2}$ è quindi sufficiente deomogeneizzare rispetto la variabile x_0 (cioè applicare j_0^{-1}) ed otteniamo che gli asintoti sono le rette di equazioni:

$$\boxed{\begin{array}{c} r_1' : 1 + ix - y = 0 \\ r_2' : 1 - ix + y = 0 \\ t_1' : 1 - ix - y = 0 \\ t_2' : 1 + ix + y = 0. \end{array}}$$