Geometria A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

A.A. 2020/2021

Provetta - 3 giugno 2021

Esercizio 1. Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Si consideri la mappa $q : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da

$$A \mapsto \det A.$$

(1) Provare che q è una forma quadratica e trovare la matrice associata.
(2) Calcolare rango e segnatura della forma quadratica.
(3) Trovare una base di matrici in $M_2(\mathbb{R})$ per la forma canonica di $q(A)$.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la curva algebrica definita dall'equazione

$$f(x,y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 + xy^4 = 0.$$

Trovare:

(1) I punti singolari della chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$. Per ognuno di essi calcolare la molteplicità e le tangenti principali.
(2) I punti all'infinito e gli asintoti di $\mathcal{C}$.
(3) Tutte le rette del fascio di centro $B = [1 : 0 : 0]$ che sono tangenti a $\overline{\mathcal{C}}$ in due punti distinti.

Soluzione Esercizio 1. (1) Presa una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, possiamo identificare $M_2(\mathbb{R})$ con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dotato della base canonica tramite l'identificazione

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad (a, b, c, d)^t \in \mathbb{R}^4.$$

Ora $q : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ può essere identificata con una mappa $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data da

$$q(a, b, c, d) = ad - bc.$$

Essendo q data da un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili a, b, c, d, questa è effettivamente una forma quadratica e la matrice associata è chiaramente data da

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Le informazioni sul rango e sulla segnatura sulla forma quadratica di q sono contenute nel polinomio caratteristico di Q:

$$p_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -\lambda & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\lambda & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)^2.$$

Visto che $p_Q(\lambda)$ non ha autovalori nulli, segue che

$$\operatorname{rango} q = 4.$$

Di più, dalla fattorizzazione di $p_Q(\lambda)$, segue che gli autovalori sono due positivi, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, e due negativi, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1/2$. Quindi concludiamo che

$$\operatorname{segnatura} q = (2, 2).$$

(3) Grazie alla segnatura appena trovata, il Teorema di Sylvester ci assicura che esiste una base di $\mathbb{R}^4$ per cui la forma quadratica si scrive come

$$q'(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - z^2 - t^2.$$

La teoria ci assicura che la base che cerchiamo è data da una base di autovettori di Q.

Sappiamo che gli autovettori associati all'autovalore $\lambda = 1/2$ si ottengono dalle soluzioni del sistema

$$\left(Q - \frac{1}{2}\mathrm{Id}\right) v = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} -v_1 + v_4 = 0 \\ -v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad v = \begin{pmatrix} t \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poniamo allora $u_1 = (1, 0, 0, 1)^t$ e $u_2 = (0, -1, 1, 0)^t$. D'altra parte, gli autovettori associati all'autovalore $\lambda = -1/2$ sono dati da

$$\left(Q + \frac{1}{2}\mathrm{Id}\right) v = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} v_1 + v_4 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad v = \begin{pmatrix} -t \\ s \\ s \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Completiamo la base con $u_3 = (-1, 0, 0, 1)^t$ e $u_4 = (0, 1, 1, 0)^t$. Controlliamo che la base trovata sia quella richiesta: chiamiamo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

allora un semplice prodotto tra matrici ci porta

$$Q_1 = BQB^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Al più di riscalare i vettori u_i, abbiamo diagonalizzato la forma quadratica. Non rimane che riportare i quattro vettori trovati in elementi di $M_2(\mathbb{R})$ usando la biezione introdotta a inizio esercizio:

$$u_1 = (1, 0, 0, 1)^t \quad \longleftrightarrow \quad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = (0, -1, 1, 0)^t \quad \longleftrightarrow \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = (-1, 0, 0, 1)^t \quad \longleftrightarrow \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$u_4 = (0, 1, 1, 0)^t \quad \longleftrightarrow \quad \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da questo segue che, usando questa base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$, una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ si scrive come

$$A = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 + \delta\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma & \delta - \beta \\ \beta + \delta & \alpha + \gamma \end{pmatrix} \quad \text{per } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

In questa base

$$\det A = (\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma) - (\delta - \beta)(\beta + \delta) = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2.$$

□

Soluzione Esercizio 2. (1) Cominciamo scrivendo l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, x_2) &= x_0^2x_1^3 - x_0^2x_1x_2^2 + x_0^2x_1^2x_2 - x_0^2x_2^3 + x_1x_2^4 = \\ &= x_0^2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2^4. \end{aligned}$$

Sappiamo che i punti singolari di $\overline{\mathcal{C}}$ sono tutti e soli i punti che annullano il gradiente di F e tali che $F(x_0, x_1, x_2) = 0$:

$$\begin{cases} x_0^2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2^4 = 0 \\ F_{x_0} = 2x_0(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2 = 0 \\ F_{x_1} = 3x_0^2 x_1^2 - x_0^2 x_2^2 + 2x_0^2 x_1 x_2 + x_2^4 = 0 \\ F_{x_2} = -2x_0^2 x_1 x_2 + x_0^2 x_1^2 - 3x_0^2 x_2^2 + 4x_1 x_2^3 = 0 \end{cases}.$$

Procediamo per casi dalla fattorizzazione della seconda equazione. Se $x_0 = 0$, dalla terza equazione segue che anche $x_2 = 0$ e le altre equazioni (la prima e la quarta) sono verificate, quindi otteniamo il punto $A = [0 : 1 : 0] \in \overline{\mathcal{C}}$. Se $x_1 = x_2$, allora il sistema diventa

$$\begin{cases} x_2^5 = 0 \\ x_1 = x_2 \\ 4x_0^2 x_1^2 + x_1^4 = 0 \\ -4x_0^2 x_1^2 + 4x_1^4 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 \\ x_1^2(4x_0^2 + x_1^2) = 0 \\ 4x_1^2(x_1^2 - x_0^2) = 0 \end{cases}.$$

Chiaramente otteniamo $x_1 = x_2 = 0$, da cui ricaviamo il punto $B = [1 : 0 : 0] \in \overline{\mathcal{C}}$. In ultimo se $x_1 = -x_2$, allora il sistema diventa

$$\begin{cases} -x_2^5 = 0 \\ x_1 = -x_2 \\ x_2^4 = 0 \\ x_0^2 x_1^2 - x_0^2 x_2^2 - 4x_2^4 = 0 \end{cases}.$$

Ancora una volta otteniamo il punto B trovato sopra. In conclusione ci sono due punti singolari: $A = [0 : 1 : 0]$ e $B = [1 : 0 : 0]$.

Studiamo la molteplicità di A mettendoci nella carta affine $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ (e possiamo supporre senza problemi $x_1 = 1$). In questo caso otteniamo

$$F(x_0, 1, x_2) = x_0^2 - x_0^2 x_2^2 + x_0^2 x_2 - x_0^2 x_2^3 + x_2^4$$

e si vede che il più piccolo monomio ha grado 2, quindi $m_A(\overline{\mathcal{C}}) = 2$ e A è un punto doppio. Di più, esiste una unica tangente principale, ottenuta prendendo i termini lineari della fattorizzazione della parte omogenea di grado minimo, data dall'equazione $x_0 = 0$ (quindi il punto doppio non è ordinario).

D'altra parte, per studiare B ci mettiamo nella carta affine $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ (e come prima supponiamo $x_0 = 1$), allora

$$F(1, x_1, x_2) = f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 - x_2^3 + x_1 x_2^4.$$

Segue quindi che B è un punto triplo visto che $m_B(\overline{\mathcal{C}}) = 3$. Per calcolare le tangenti principali usiamo il fatto che

$$x_1^3 - x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2$$

quindi abbiamo due tangenti principale date dalle equazioni $x_1 \pm x_2 = 0$.

(2) I punti all'infinito di $\overline{\mathcal{C}}$ si ottengono dall'intersezione $\overline{\mathcal{C}} \cap \{x_0 = 0\}$, quindi i punti $[0 : x_1 : x_2]$ che

risolvono l'equazione $x_1x_2^4 = 0$, da cui otteniamo ancora il punto $A = [0:1:0]$ e il nuovo punto $C = [0:0:1]$.

La tangente principale in A è la retta di equazione $x_0 = 0$ che non sta nella carta U_0 dove vive la curva $\mathcal{C}$, quindi non può essere un candidato asintoto. Esaminiamo cosa succede a C. Non essendo un punto singolare della curva $\overline{\mathcal{C}}$, esso ammette un'unica retta tangente:

$$\nabla F(0,0,1) = (0,1,0) \quad \rightsquigarrow \quad \{x_1 = 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

Segue che la retta $x = 0$ è un asintoto per $\mathcal{C}$.

(3) Notiamo che essendo B un punto singolare, ogni retta passante per B è tangente alla curva, quindi è sufficiente trovare le rette del fascio centrato in B che siano tangenti a $\overline{\mathcal{C}}$ in un altro punto.

Descriviamo le rette del fascio mettendoci nella carta affine U_0, in cui B coincide con l'origine:

$$ax_1 + bx_2 = 0 \quad \text{con } [a:b] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Tornando in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, le rette del fascio saranno date dalla chiusura proiettiva delle rette che abbiamo appena ottenuto, con le stesse equazioni.

Dividiamo le rette del fascio in due tipologie: se $b = 0$ oppure se $b \neq 0$. Se $b = 0$, otteniamo dal fascio la retta r di equazione $x_1 = 0$ che sappiamo essere tangente a $\overline{\mathcal{C}}$ in C per il punto precedente. Per quanto detto all'inizio, la retta r ha tutte le proprietà richieste.

Supponiamo ora $b \neq 0$. In questo modo il nostro fascio di rette è dato dall'equazione $x_2 = kx_1$ con $k = -a/b \in \mathbb{R}$. Intersechiamo questo fascio con l'equazione della curva $\overline{\mathcal{C}}$ e otteniamo

$$0 = x_0^2x_1^3(1 - k^2 + k - k^3) + k^4x_1^5 = x_1^3((1-k)(1+k)^2x_0^2 + k^4x_1^2).$$

Studiamo le soluzioni di questa equazione al variare di k.

Se $x_1 = 0$, allora $x_2 = 0$ e otteniamo che la curva interseca solo in B. Supponiamo dunque $x_1 \neq 0$. Scriviamo $t = x_0/x_1$ e possiamo riscrivere l'equazione precedente come

$$(1-k)(1+k)^2t^2 + k^4 = 0.$$

Supponiamo $k = \pm 1$, allora otteniamo le rette $x_2 = \pm x_1$. Si vede con un semplice conto che l'intersezione di queste rette con la curva è ancora solamente il punto B. Supponiamo quindi $k \neq \pm 1$ e riscriviamo

$$t^2 + \frac{k^4}{(1-k)(1+k)^2} = 0.$$

Se $k = 0$, cioè se $a = 0$, otteniamo la retta s del fascio con equazione $x_2 = 0$, la cui intersezione con la curva produce l'equazione

$$x_0^2x_1^3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad A = [0:1:0] \quad \text{oppure} \quad B = [1:0:0].$$

Essendo entrambi punti singolari, ogni retta passante per essi è tangente ad entrambi, quindi s soddisfa le proprietà richieste.

Rimane solo da esaminare quando $k \neq 0, \pm 1$, cioè quando

$$\delta(k) := \frac{k^4}{(1-k)(1+k)^2} \neq 0.$$

Allora l'equazione in t e in k diventa

$$t^2 + \delta(k) = 0$$

che ha soluzioni solo se $\delta(k) < 0$, cioè se $k > 1$. In questo caso otteniamo soluzioni della forma $x_0 = \pm x_1 \sqrt{\delta(k)}$. Da questo segue che l'intersezione tra la curva e la retta produce punti della forma

$$D(k) = \left[\pm\sqrt{\delta(k)} : 1 : k\right]$$

che sono punti distinti perché $\delta(k) \neq 0$. In particolare, questi punti sono lisci e distinti, quindi se la retta fosse tangente in uno di questi due punti, la curva dovrebbe essere almeno una sestica per il Teorema di Bezout.

(3 bis) L'intuizione geometrica sembrerebbe dirci che, nel piano, un punto singolare possegga più rette tangenti, ma solo in un numero finito. È possibile, infatti, definire le rette tangenti in un punto singolare ad una curva piana come le tangenti principali. In questo caso avremo che le uniche rette del fascio tangenti a B sono le rette di equazioni

$$x_1 \pm x_2 = 0.$$

L'intersezione di queste rette con la curva abbiamo già visto che producono solo il punto B. Con questa interpretazione di retta tangente in un punto singolare nel piano, allora non esistono rette tangenti con le proprietà richieste. Infatti, supponiamo che esista una retta passante per B e tangente ad altri due punti E_1, E_2 della curva. Essendo B un punto triplo, segue che E_1, E_2 sono punti semplici per la retta e quindi quest'ultima non può essere tangente ad E_1, E_2. $\square$