Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2023/2024
Provetta - 5 giugno 2024

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano Euclideo e siano $A, B \in \mathbb{E}^2$, dove $A = (1,1)$ e $B = (1,0)$. Sia $k \geq 0$. Si consideri il luogo geometrico Γ_k dei punti $P \in \mathbb{E}^2$ tali che:

$$\Gamma_k : \quad \langle P - A, P - B \rangle = k \cdot \mathrm{d}(P, A)^2.$$

dove $\langle *, * \rangle$ indica il prodotto scalare standard e $\mathrm{d}(*, *)$ la distanza Euclidea.

(1) Determinare una equazione di Γ_k;

(2) Classificare la conica Γ_k al variare del parametro k;

(3) Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ e l'identificazione $\mathbb{A}^2 \cong \{x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2$. Determinare l'equazione della chiusura proiettiva di $\overline{\Gamma_k} \subset \mathbb{P}^2$ e una proiettività $f_k \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tale che $f_k(\overline{\Gamma_k}) = \{X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0\}$ per ogni $k \neq 1$;

(4) Determinare, se esiste, il centro di $\Gamma_{\frac{1}{2}}$;

(5) Determinare i punti all'infinito di Γ_k nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ il piano proiettivo reale. Si consideri la seguente quartica in $\mathbb{P}^2$:

$$\mathcal{C} : \quad F(x_0, x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^2 - x_0 x_1 (x_1^2 - x_2^2) = 0$$

Si identifichi $\mathbb{A}^2 \cong \{[1, x, y] \in \mathbb{P}^2 \mid (x, y) \in \mathbb{A}^2\} \subset \mathbb{P}^2$.

(1) Si dimostri che il punto $[1, 0, 0]$ è l'unico punto singolare di $\mathcal{C}$. Si calcolino le corrispondenti tangenti affini nelle coordinate $(x, y) \in \mathbb{A}^2$;

(2) Si consideri la cubica in $\mathbb{P}^2$:

$$\mathcal{D} : \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2) = 0$$

Si dica se $\mathcal{D}$ è singolare e si calcolino le equazioni degli asintoti;

(3) Si verifichi che $\mathcal{D}$ interseca la conica $\{x_1^2 + x_2^2 - x_0 x_1 = 0\}$ in tre punti complessi $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$;

(4) Si verifichi che la quaterna di punti $\{P_1, P_2, P_3, [1, 1, 0]\}$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è in posizione generale, dove P_1, P_2 e P_3 sono definiti al punto precedente. Si costruisca una proiettività $f \colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $f(P_1) = [1, 0, 0]$, $f(P_2) = [0, 1, 0]$, $f(P_3) = [0, 0, 1]$, $f([1, 1, 0]) = [1, 1, 1]$.

Soluzione Esercizio 1. (1) Sia $P = (x, y)$. Allora:

$$\begin{aligned} P \in \Gamma_k &\iff (x-1)^2 + (y-1)y = k(x-1)^2 + k(y-1)^2 \\ &\iff (k-1)(x-1)^2 + (y-1)(k(y-1) - y) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(2) Ai fini di studiare la conica, espandiamo l'equazione in questo modo:

$$\Gamma_k\colon \quad (k-1)x^2 + (k-1)y^2 - 2(k-1)x + (1-2k)y + (2k-1) = 0$$

La matrice associata a Γ_k è dunque:

$$A_k \;=\; \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 2k-1 & 1-k & \frac{1-2k}{2} \\ 1-k & k-1 & 0 \\ \frac{1-2k}{2} & 0 & k-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sviluppando rispetto all'ultima colonna con il metodo di Laplace, il determinante di A_k è:

$$\begin{aligned} \det(A_k) &= \left(\frac{1-2k}{2}\right)^2 (1-k) + (k-1)[(2k-1)(k-1) - (1-k)^2] \\ &= (1-k)\left[\frac{1}{4} + \cancel{k^2} - \cancel{k} \cancel{- 2k^2} + \cancel{3k} - \cancel{1} + \cancel{k^2} - \cancel{2k} + \cancel{1}\right] = -\frac{k-1}{4}. \end{aligned}$$

Dunque, Γ_k è non-degenere per $k \neq 1$. Notiamo che per $k = 1$ abbiamo che:

$$\Gamma_1\colon \quad y - 1 = 0$$

e dunque Γ_1 è una retta. Se, invece, $k \neq 1$, consideriamo la sottomatrice 2×2 di A_k:

$$A_{k,0} \;=\; \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} k-1 & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Poiché $\det(A_{k,0}) = (k-1)^2 > 0$, Γ_k è un'ellisse per $k \geq 0$, $k \neq 1$. Riassumendo:

$$\Gamma_k\colon \begin{cases} \text{retta} & \text{se } k = 1 \\ \text{conica non-degenere, ellisse} & \text{se } k \neq 1 \end{cases}.$$

(3) Usiamo l'Equazione (1): la chiusura proiettiva di Γ_k è:

$$\overline{\Gamma_k}\colon \quad (k-1)(x_0 - x_1)^2 - (x_0 - x_2)((k-1)x_2 - kx_0) = 0 \tag{2}$$

Notiamo che abbiamo una equazione con un quadrato e un prodotto di due forme lineari. Per trasformare il prodotto in una differenza di due quadrati, usiamo una sostituzione somma per differenza. Distinguiamo i due casi.

Supponiamo $k < 1$. Scegliamo il cambio di coordinate $[x_0, x_1, x_2] \mapsto [X_0, X_1, X_2]$ in modo tale che:

$$X_1 = \sqrt{1-k} \cdot x_0 - \sqrt{1-k} \cdot x_1, \; X_2 - X_0 = x_0 - x_2, \; X_2 + X_0 = (k-1)x_2 - kx_0.$$

In questo modo otteniamo la proiettività $f_k \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ di equazioni:

$$f_k([x_0, x_1, x_2]) = \left[\frac{-(k+1)x_0 + kx_2}{2}, \sqrt{1-k} \cdot x_0 - \sqrt{1-k} \cdot x_1, \frac{-(k-1)x_0 + (k-2)x_2}{2} \right]$$

Quest'ultima è ben definita poiché la sua matrice associata è:

$$M_k = \begin{pmatrix} -\frac{k+1}{2} & 0 & \frac{k}{2} \\ \sqrt{1-k} & -\sqrt{1-k} & 0 \\ -\frac{k-1}{2} & 0 & \frac{k-2}{2} \end{pmatrix},$$

il cui determinante, sviluppando con Laplace lungo la seconda colonna, è $-\sqrt{1-k}/2 \neq 0$. Questa proiettività è tale che, per ogni $k < 1$, $f(\overline{\Gamma_k}) = \{-X_1^2 - X_2^2 + X_0^2 = 0\}$. Analogamente, possiamo definire, per $k > 1$:

$$f_k([x_0, x_1, x_2]) = \left[\frac{-(k-1)x_0 + (k-2)x_2}{2}, \sqrt{1-k} \cdot x_0 - \sqrt{1-k} \cdot x_1, \frac{-(k+1)x_0 + kx_2}{2} \right]$$

che è ben definita in quanto la matrice associata ha determinante $\sqrt{k-1}/2 \neq 0$. Anche questa proiettività rispetta $f_k(\overline{\Gamma_k}) = \{X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0\}$.

(4) Come già visto al punto 2, se $k \neq 1$, allora Γ_k è una conica non-degenere a centro. In particolare, per $k = 1/2$, la sua matrice associata è:

$$A_{1/2} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Le equazioni del centro $C_{1/2} = (x, y)$ sono dunque date dalle ultime due righe:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x}{2} = 0 \\ -\frac{y}{2} = 0 \end{cases} \iff C_{1/2} = (1, 0).$$

(5) Se $k = 1$, l'Equazione (2) diventa:

$$\Gamma_1 \colon \quad x_0(x_0 - x_2) = 0$$

e quindi l'intera retta all'infinito è contenuta in Γ_1. Se invece $k \neq 1$, allora:

$$\Gamma_k \cap \{x_0 = 0\} \colon \quad x_1^2 + x_2^2 = 0$$

e quindi abbiamo i due punti:

$$P_1 = [0, 1, i], \; P_2 = [0, 1, -i]$$

dove $i \in \mathbb{C}$ è l'unità immaginaria, $i^2 = -1$.

Soluzione Esercizio 2. (1) Poiché $[1, 0, 0] \in \{x_0 \neq 1\} \cong \mathbb{A}^2$, possiamo passare alle coordinate affini, in cui il punto $[1, 0, 0]$ è identificato con l'origine $(0, 0)$. Con queste coordinate, si ha che:

$$\mathcal{C} \cap \mathbb{A}^2 \colon \quad (x^2 + y^2)^2 - x(x^2 - y^2) = 0$$

e quindi l'origine è un punto singolare di molteplicità 3, in quanto il fattore omogeneo di grado più basso del polinomio che definisce $\mathcal{C} \cap \mathbb{A}^2$ è $-x(x^2 - y^2)$. Quest'ultimo si fattorizza come $x(y - x)(y + x) = 0$, che dà vita all'unione delle 3 rette tangenti a $\mathcal{C} \cap \mathbb{A}^2$ nell'origine. Supponiamo ora che vi sia un punto $P \in \mathcal{C}$ singolare per $\mathcal{C}$ e tale che $P \neq [1, 0, 0]$. Sia r la retta proiettiva per i punti P e $[1, 0, 0]$. Allora, la molteplicità di intersezione di questa retta con $\mathcal{C}$ nel punto P è strettamente maggiore di 1. Indichiamo con $\mathrm{mult}_Q(r \cap \mathcal{C})$ la molteplicità di intesezione di un punto $Q \in r \cap \mathcal{C}$. Per quanto appena detto, $\mathrm{mult}_P(r \cap \mathcal{C}) \geq 2$. Per il teorema di Bézout:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 1 = \deg(F) \cdot \deg(r) &= \sum_{Q \in r \cap \mathcal{C}} \mathrm{mult}_Q(r \cap \mathcal{C}) \\ &\geq \mathrm{mult}_P(r \cap \mathcal{C}) + \mathrm{mult}_{[1,0,0]}(r \cap \mathcal{C}) \\ &\geq 2 + 3, \end{aligned}$$

che è un assurdo. Pertanto, $P = [1, 0, 0]$ è l'unico punto singolare di $\mathcal{C}$.

(2) La cubica $\mathcal{D}$ ha equazione:

$$\mathcal{D} \colon \quad 4x_1(x_1^2 + x_2^2) - 3x_0x_1^2 + x_0x_2^2 = 0$$

Come nel caso precedente, $[1, 0, 0]$ è un punto singolare di ordine 2, e poiché $\mathcal{D}$ ha grado 3, questo è l'unico punto singolare. Le tangenti affini sono $y = \pm x$. Per calcolare gli asintoti, dobbiamo trovare i punti all'infinito reali di $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} \cap \{x_0 = 0\} \colon \quad 4x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Poiché cerchiamo soluzioni reali, le uniche scelte possibili sono $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, che non dà vita a un punto del proiettivo, e $x_0 = x_1 = 0$, che ci dà il punto $[0, 0, 1]$. Quindi abbiamo solo un asintoto.

Calcoliamo ora le tangenti nel punto all'inifinito $[0, 0, 1]$. Sia $G = \partial F / \partial x_1$. Scriviamo le derivate parziali:

$$\frac{\partial G}{\partial x_0} = -3x_1^2 + x_2^2, \quad \frac{\partial G}{\partial x_1} = 12x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_0x_1, \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = 8x_1x_2 + 2x_0x_2$$

e calcoliamole nel punto $P = [0,0,1]$:

$$\frac{\partial G}{\partial x_0}(P) = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial x_1}(P) = 4, \quad \frac{\partial G}{\partial x_2}(P) = 0$$

e quindi la chiusura proiettiva dell'asintoto ha equazione:

$$4x_1 + x_0 = 0$$

dalla quale deduciamo l'equazione affine dell'asintoto $4x+1 = 0$. Abbiamo dunque un asintoto verticale.

(3) I punti di intersezione tra $\mathcal{D}$ e la conica $\{x_1^2 + x_2^2 - x_0x_1 = 0\}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ hanno equazione:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0x_1 = 0 \\ 4x_1(x_1^2 + x_2^2) - 3x_0x_1^2 + x_0x_2^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = x_0x_1 \\ \cancel{4x_0x_1^2} - \cancel{3x_0x_1^2} + x_0^2x_1 - \cancel{x_0x_1^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = x_0x_1 \\ x_0^2x_1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti:

$$x_0^2 = 0 \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \rightsquigarrow P_{1/2} = [0,1,\pm i],$$
$$x_1 = 0 \rightsquigarrow x_2^2 = 0 \rightsquigarrow P_3 = [1,0,0].$$

(4) Definiamo $P_4 = [1,1,0]$. Notiamo che $(2,2,0)^T = 2(1,0,0)^T + (0,1,i)^T + (0,1,-i)^T$. Abbiamo dunque dei rappresentanti $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, ove:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tali che $P_i = [p_i]$ per ogni $i \in \{1,2,3,4\}$ e $P_4 = [p_1 + p_2 + p_3]$. Pertanto, la quaterna $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ di punti di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è in posizione generale. Troviamo ora la proiettivita $f\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ richiesta. Sia $\mathcal{M}$ la sua matrice associata nel riferimento canonico. Scriviamo $\mathcal{M}$ tramite le sue colonne:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}^3.$$

Per trovare la proiettività f, dobbiamo imporre $\mathcal{M}p_i = e_i$ per ogni $i \in \{1,2,3\}$, dove e_i è l'i-esimo vettore della base canonica. Si ha che:

$$\mathcal{M}(2,0,0)^T = (1,0,0)^T \rightsquigarrow c_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}(0,1,i)^T = (0,1,0)^T \\ \mathcal{M}(0,1,-i)^T = (0,0,1)^T \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} c_2 + ic_3 = (0,1,0)^T \\ c_2 - ic_3 = (0,0,1)^T \end{cases} \rightsquigarrow c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \; c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i/2 \\ i/2 \end{pmatrix}$$

da cui segue:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 1/2 & i/2 \end{pmatrix},$$

che è non-singolare poiché $\det(\mathcal{M}) = i/4 \neq 0$. Questa ci dà la proiettività:

$$f([x_0, x_1, x_2]) = [x_0/2, x_1/2 - ix_2/2, x_1/2 + ix_2/2] = [x_0, x_1 - ix_2, x_1 + ix_2].$$