Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2022/2023

Provetta - Giugno 2023

Esercizio 1. Sia $C_{a,b} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ la curva algebrica affine data dall'equazione:

$$f_{a,b}(x, y) : axy^2 - y^4 + x^3 - 2bx^2y = 0.$$

con $a, b \in \mathbb{C}$.

(1) Determinare i punti impropri e gli asintoti di $C_{1,1}$.

(2) Determinare i punti singolari di $C_{1,1}$, le loro molteplicità e le tangenti principali. Determinare inoltre eventuali punti singolari ordinari.

(3) Determinare l'equazione della tangente a $C_{1,0}$ nel punto $P = (-\frac{1}{4}, -\frac{i}{2\sqrt{2}})$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo tridimensionale di origine O rispetto al prodotto scalare standard, dotato della base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Si considerino le rette

$$r_k : \begin{cases} x = (3k+2) + t \\ y = (k-1)t \\ z = 3 + (k-2)t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(1) Studiare la posizione reciproca di r_k e s.

(2) Trovare i valori di k per cui le rette r_k e s formano un angolo $\theta_k = \frac{\pi}{3}$.

(3) Fissato $k = 1$, calcolare la distanza $d(r_1, s)$ e trovare le equazioni della retta perpendicolare a r_1 e s.

Soluzione 1. (1) Per prima cosa identifichiamo lo spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{C}^2)$ di coordinate x, y con l'aperto affine $U_0 = \{[1, x, y]\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tramite la mappa

$$j_0 : \mathbb{A}(\mathbb{C}^2) \to U_0$$

definita da $j_0(x, y) = [1, x, y]$. Chiamiamo $C := C_{1,1}$ e $f(x, y) := f_{1,1}(x, y)$. Consideriamo quindi la chiusura proiettiva $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ della curva C. Omogeneizzando l'equazione della curva rispetto alla nuova variabile x_0 otteniamo l'equazione di $\overline{C}$

$$F(x_0, x, y) : x_0xy^2 - y^4 + x_0x^3 - 2x_0x^2y = 0$$

Calcoliamo ora le intersezioni tra $\overline{C}$ e la retta all'infinito data da $x_0 = 0$, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} x_0xy^2 - y^4 + x_0x^3 - 2x_0x^2y = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo $x_0 = 0$ nella prima equazione otteniamo la condizione $-y^4 = 0$ che ha come unica soluzione $y = 0$. Perciò l'unico punto improprio di C è il punto $P = [0, 1, 0]$.

Poichè $P = [0, 1, 0]$ appartiene all'aperto affine $U_1 = \{[x_0, x, y] | x \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ possiamo considerare le nuove coordinate

$$u = \frac{x_0}{x} \quad v = \frac{y}{x}$$

In queste nuovo aperto affine il punto P ha coordinate $P = (0, 0)$. La curva affine $C_1 = \overline{C} \cap U_1$ ha ora equazioni

$$C_1 : uv^2 - v^4 + u - 2uv = 0$$

Poichè la parte omogenea di grado 1 è non nulla abbiamo che P è un punto semplice per la curva proiettiva $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. La retta tangente L a C_1 nel punto P ha perciò equazione:

$$L : u = 0$$

Poichè dal cambio di coordinate precedente si ha

$$u = 0 \quad \rightsquigarrow \frac{x_0}{x} = 0 \quad \rightsquigarrow x_0 = 0$$

si ha che la curva affine di partenza C è tangente alla sua retta all'infinito nel punto improprio P e perciò non possiede asintoti in $\mathbb{A}(\mathbb{C}^2)$.

(2) Per calcolare i punti singolari di C ci basta calcolare i punti propri di $\overline{C}$ che sono soluzioni comuni delle derivate parziali di F rispetto a x_0, x, y.

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = xy^2 + x^3 - 2x^2y \quad \frac{\partial F}{\partial x} = x_0y^2 + 3x_0x^2 - 4x_0xy \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x_0xy - 4y^3 - 2x_0x^2$$

Mettendo a sistema le precedenti equazioni otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_0} = xy^2 + x^3 - 2x^2y = x(y-x)^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} = x_0y^2 + 3x_0x^2 - 4x_0xy = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2x_0xy - 4y^3 - 2x_0x^2 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo due casi:

(a) $x = 0$

(b) $x = y$

Sostituendo $x = 0$ nella terza equazione otteniamo $-4y^3 = 0$, ossia $y = 0$. Perciò un punto proprio singolare è $Q = [1, 0, 0]$. Sostituendo invece $x = y$ sempre nella terza equazione otteniamo nuovamente $-4y^3 = 0$ e quindi ritroviamo il punto Q. L'unico punto singolare è perciò il punto Q, corrispondente all'origine $Q = (0, 0)$ nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{C}^2)$ di partenza. La parte omogenea di grado minimo di $f(x, y)$ è:

$$f(x, y)_3 = xy^2 + x^3 - 2x^2y = x(x-y)^2$$

Le tangenti principali sono dunque

$$L_1 : x = 0 \qquad L_2 : x - y = 0$$

dove L_1 ha molteplicità 1 mentre L_2 ha molteplicità 2. Poichè le molteplicità delle tangenti principali non sono tutte uguali a 1 si ha che Q è un punto singolare non ordinario per C.

(3) Per trovare l'equazione della retta tangente a $C_{1,0}$ nel punto $P = (-\frac{1}{4}, -\frac{i}{2\sqrt{2}})$ valutiamo le derivate parziali della chiusura proiettiva $\overline{C_{1,0}}$ nel punto $[1, -\frac{1}{4}, -\frac{i}{2\sqrt{2}}] = [8, -2, -2i\sqrt{2}]$. Otteniamo quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial F_{1,0}}{\partial x_0}(8, -2, -2i\sqrt{2}) = xy^2 + x^3 = 8 \\ \frac{\partial F_{1,0}}{\partial x}(8, -2, -2i\sqrt{2}) = x_0y^2 + 3x_0x^2 = 32 \\ \frac{\partial F_{1,0}}{\partial y}(8, -2, -2i\sqrt{2}) = 2x_0xy - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

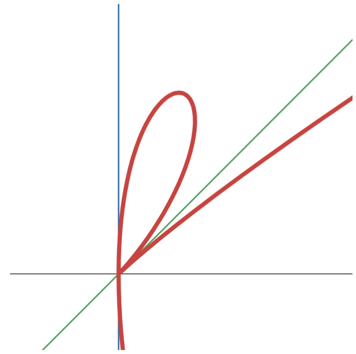
Pertanto l'equazione della retta proiettiva tangente a $\overline{C_{1,0}}$ in $[8, -2, -2i\sqrt{2}]$ è

$$R : 8x_0 + 32x = 0$$

Restringendosi all'aperto affine originario $\mathbb{A}(\mathbb{C}^2) = U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ otteniamo l'equazione della retta affine tangente a $C_{1,0}$ nel punto $P = (-\frac{1}{4}, -\frac{i}{2\sqrt{2}})$

$$r : 1 + 4x = 0$$

Di seguito si riporta il grafico della curva $C_{1,1}$ in rosso, in cui si può notare il punto singolare nell'origine e le due tangenti principali $x = 0$ e $x - y = 0$ rispettivamente in blu e verde.



$\square$

Soluzione 2. (1) Siano $v_{r_k} = (1, k-1, k-2)$ e $v_s = (1,1,2)$ i vettori direzione delle rette r_k e s. Cominciamo a vedere per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha che r_k è parallela a s: dobbiamo imporre

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & k-1 & k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} 1-(k-1)=0 \\ 2-(k-2)=0 \\ 2(k-1)-(k-2)=0 \end{cases}.$$

La prima equazione è risolta per $k=2$ mentre la seconda equazione è risolta per $k=4$, quindi il sistema non ha soluzione. Segue che r_k e s non possono mai essere parallele, rimane da capire quando sono incidenti e quando sono sghembe. Avremo che r_k e s sono incidenti quando, indicati con t e t' i parametri rispettivamente di r_k e di s, ci sono soluzioni al sistema

$$\begin{cases} (3k+2)+t = t'-1 \\ (k-1)t = t'+1 \\ 3+(k-2)t = 2t' \end{cases}$$

Ricavando t' dalle 3 possibili coppie di equazioni otteniamo rispettivamente

$$t' = \frac{4k+2}{k-2} \quad t' = \frac{4k-5}{k} \quad \frac{4k-3}{k-4}$$

Dalle prime due ricaviamo la condizione $k = 2/3$ mentre dalle ultime due la condizione $k = 10/9$. Perciò se $k \neq 0, 2, 4$ le rette r_k e s sono non incidenti, quindi sghembe. Se $k = 0$ dalla prima e dalla terza ricaviamo $t' = -1$ e $t' = \frac{3}{4}$, perciò anche in questo caso le rette sono sghembe. Analogamente si osserva che anche per $k = 2, 4$ non c'è soluzione in t'. Le rette r_k ed s sono perciò sghembe per ogni valore di k.

(2) L'angolo tra le due rette è l'angolo formato dai vettori direzione di quest'ultime, dunque avremo

$$\cos\theta_k = \frac{(v_{r_k}, v_s)}{\|v_{r_k}\| \cdot \|v_s\|} = \frac{3k-4}{\sqrt{2k^2-6k+6}\sqrt{6}}.$$

Poichè $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$ l'equazione che ci serve è

$$\frac{1}{2} = \frac{3k-4}{\sqrt{12k^2-36k+36}} \quad \rightsquigarrow \quad 12k^2-36k+36 = 36k^2-96k+64 \quad \rightsquigarrow \quad 6k^2-15k+7=0.$$

Risolvendo rispetto a k otteniamo le due soluzioni:

$$k_1 = \frac{15+\sqrt{57}}{12} \quad k_2 = \frac{15-\sqrt{57}}{12}$$

(3) Per $k = 1$ otteniamo $v_1 = v_{r_1} = (1, 0, -1)$ e la retta

$$r_1 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 0 \\ z = 3 - t \end{cases} .$$

La direzione della retta cercata dovrà essere ortogonale sia a v_1 che a v_s. A questo punto non rimane che prendere punti generici $P_1 = (5+t, 0, 3-t) \in r_1$, $Q = (t'-1, t+1', 2t') \in s$ e imporre che $P_1 - Q$ sia ortogonale sia a v_1 che a v_s:

$$\begin{cases} (P_1 - Q, v_1) = 0 \\ (P_1 - Q, v_s) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t - t' + 6 - (-t - 2t' + 3) = 0 \\ (t - t' + 6) + (-t' - 1) + 2(-t - 2t' + 3) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t = -29/11 \\ t' = 25/11 \end{cases} .$$

Ne segue che $P_1 - Q = (12/11, -36/11, 12/11)$. La distanza tra le due rette risulterà perciò essere:

$$d(r_1, s) = d(P_1, Q) = d(P_1 - Q, O) = \sqrt{\frac{144}{11}} = \frac{12}{11}\sqrt{11},$$

Analogamente otteniamo che

$$\begin{cases} x = 26/11 + 12t/11 \\ y = -36t/11 \\ z = 62/11 + 12t/11 \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche della retta passante per P_1 con direzione $P_1 - Q$. $\square$