Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in matematica
A.A. 2010/2011

25 luglio 2011

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Denotiamo con $\mathbb{E}^4$ il 4–spazio euclideo numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z, w). Definiamo il 2–piano affine π e la retta affine r di $\mathbb{E}^4$ ponendo

$$\pi : \begin{cases} z = 1 \\ x - y - w = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = 2 \\ w = -1 - t. \end{cases}$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Si dimostri che r è parallela a π.

(2) Si calcoli la distanza tra r e π.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo la conica $\mathcal{C}(k)$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ponendo

$$\mathcal{C}(k) : \ (2k + 1)x_0^2 + (k^2 - k)x_1^2 + (2k + 1)x_2^2 - 2x_0x_2 = 0.$$

Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ in modo che:

(1) $\mathcal{C}(k)$ sia degenere;

(2) esista una retta proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che contiene il supporto di $\mathcal{C}(k)$.

Esercizio 3. Sia τ la topologia su $\mathbb{R}$ avente per base l'insieme

$$\mathcal{B} = \{(a, b] \mid a < b\}$$

e su $\mathbb{R}^2$ si consideri la topologia prodotto $\tau \times \tau$.

(1) Si dica, motivando la risposta, se $(\mathbb{R}^2, \tau \times \tau)$ è uno spazio di Hausdorff.

(2) Si dica, motivando la risposta, se $(\mathbb{R}^2, \tau \times \tau)$ è uno spazio connesso.

(3) Determinare chiusura e parte interna (rispetto a questa topologia) del sottinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito da $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x\}$.

(4) Si dica se la funzione $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ definita da $f(x) = -x$ è continua oppure no.

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico e sia $I = [0, 1]$. Su $X \times I$ si consideri la relazione d'equivalenza $\sim$ definita da

$$(x, t) \sim (y, s) \iff (x, t) = (y, s) \quad \text{o} \quad t = s = 1.$$

Si denoti con $C(X) = X \times I/ \sim$.

(1) Si provi che $C(X)$ è connesso per archi.

(2) Si provi che se X è compatto allora anche $C(X)$ lo è.

(3) Si provi che $C(S^2) \cong \mathbb{D}^3$.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Un vettore direzione di r è dato da $v := (0, 1, 0, -1)$. La giacitura $G(\pi)$ di π ha equazioni cartesiane
$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y - w = 0 \end{cases}$$
$$Sol = \{(y + w, y, 0, w)^t \in \mathbb{R}^4 : y, w \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 0, 0)^t, (1, 0, 0, 1)^t \rangle = \langle v_1^t, v_2^t \rangle.$$
Dunque (v_1, v_2) è una base di $G(\pi)$.

   Sostituendo le componenti di v nelle equazioni, si verifica immediatamente che $v \in G(\pi)$. Infatti, vale:
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 - 1 - (-1) = 0 \end{cases}.$$
Segue che r è parallela a π.

2. Osserviamo che $P(1, -1, 2, -1) \in r$. Si vede che $Q(0, 0, 1, 0) \in \pi$.

   Se denotiamo con X la proiezione ortogonale di P su π, vale:
$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{PX}, v_1 \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{PX}, v_2 \rangle = 0 \end{cases}, \qquad \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QP}$$
e
$$\overrightarrow{QP} = (1, -1, 2, -1) - (0, 0, 1, 0) = (1, -1, 1, -1).$$
Poiché $X \in \pi$, esistono (unici) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $\overrightarrow{QX} = \lambda v_1 + \mu v_2$. Vale:
$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QP}, v_1 \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QP}, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda \langle v_1, v_1 \rangle + \mu \langle v_2, v_1 \rangle = \langle \overrightarrow{QP}, v_1 \rangle \\ \lambda \langle v_1, v_2 \rangle + \mu \langle v_2, v_2 \rangle = \langle \overrightarrow{QP}, v_2 \rangle \end{cases}$$

D'altra parte, si ha $\langle v_1, v_1 \rangle = 2$, $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle = 1$, $\langle v_2, v_2 \rangle = 2$, $\langle \overrightarrow{QP}, v_1 \rangle = 0$ e $\langle \overrightarrow{QP}, v_2 \rangle = 0$. Dunque, vale:

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \mu = 0.$$

Segue che $\overrightarrow{QX} = 0$ e quindi $X = Q$. La distanza tra r e π è uguale a

$$||\overrightarrow{PX}|| = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2} = 2.$$

Esercizio 2.

1. Sia $k \in \mathbb{R}$. La matrice associata alla conica $\mathcal{C}(k)$ è data da

$$A(k) := \begin{pmatrix} 2k+1 & 0 & -1 \\ 0 & k^2 - k & 0 \\ -1 & 0 & 2k+1 \end{pmatrix}$$

Vale:

$$0 = \det A(k) = (2k+1)^2(k^2-k) - (k^2-k) = 4k^2(k+1)(k-1) \quad \Leftrightarrow \quad k \in \{-1, 0, 1\}.$$

Dunque $\mathcal{C}(k)$ è degenere se e soltanto se $k \in \{-1, 0, 1\}$.

2. Calcoliamo la segnatura di $A(k)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ (NB: la segnatura è intesa nel senso del Sernesi p.207). Cominciamo col calcolare il polinomio caratteristico $p_k(\lambda)$ di $A(k)$:

$$\begin{aligned} p_k(\lambda) &:= \det(A(k) - \lambda I_3) = \\ &= \det \begin{pmatrix} 2k+1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & k^2-k-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2k+1-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (k^2 - k - \lambda)(2k - \lambda)(2k + 2 - \lambda) \end{aligned}$$

Gli autovalori di $A(k)$ sono dati da:

$$\begin{aligned} \lambda_0(k) &:= k^2 - k, \\ \lambda_1(k) &:= 2k, \\ \lambda_2(k) &:= 2k + 2 \end{aligned}$$

Studiamo i segni delle funzioni $\lambda_0(k)$, $\lambda_1(k)$ e $\lambda_2(k)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- $(\lambda_0(k) > 0 \Leftrightarrow k < 0$ o $k > 1)$ e $(\lambda_0(k) = 0 \Leftrightarrow k \in \{0, 1\})$;
- $(\lambda_1(k) > 0 \Leftrightarrow k > 0)$ e $(\lambda_1(k) = 0 \Leftrightarrow k = 0)$;

- ($\lambda_2(k) > 0 \Leftrightarrow k > -1$) e ($\lambda_2(k) = 0 \Leftrightarrow k = -1$).

$$
\begin{array}{l}
\lambda_0(k) + + + + + + + + + + + + + + + \circ - - - - - \circ + + + + + + + + + + \\
\lambda_1(k) - - - - - - - - - - - - - - - \circ + + + + + + + + + + + + + + + + \\
\lambda_2(k) - - - - - - - - - \circ + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -1 \qquad\qquad\quad 0 \qquad\qquad\quad 1
\end{array}
$$

Quindi la segnatura di $A(k)$ è:

- $(1, 2)$ se $k < -1$;
- $(1, 1)$ se $k = -1$;
- $(2, 1)$ se $k \in (-1, 0)$;
- $(1, 0)$ se $k = 0$;
- $(2, 1)$ se $k \in (0, 1)$;
- $(2, 0)$ se $k = 1$;
- $(3, 0)$ se $k > 1$.

Segue che la forma canonica di $\mathcal{C}(k)$ è data da:

- $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ (conica generale) se $k \in (-\infty, 1) \setminus \{-1, 0\}$;
- $x_0^2 - x_1^2 = 0$ (conica semplicemente degenere: prodotto di rette reali distinte) se $k = -1$;
- $x_0^2 = 0$ (conica doppiamente degenere) se $k = 0$;
- $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (conica semplicemente degenere: prodotto di rette complesse coniugate distinte) se $k = 1$;
- $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (conica generale a punti non reali) se $k > 1$.

Dunque, il supporto $|\mathcal{C}(k)|$ di $\mathcal{C}(k)$ è contenuto in qualche retta proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ se e soltanto se $|\mathcal{C}(k)|$ è vuoto, è un punto o è una retta, ovvero se e soltanto se $k \in \{0\} \cup [1, +\infty)$.

Esercizio 3.

1. $(\mathbb{R}^2, \tau \times \tau)$ è di Hausdorff in quanto prodotto di spazi di Hausdorff. Basta quindi provare che $(\mathbb{R}, \tau)$ è di Hausdorff.

   Siano allora $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq y$, possiamo supporre che $x < y$. Siano a e b tali che $a < x < b < y$, allora $x \in (a, b]$, $y \in (b, y]$ e $(a, b] \cap (b, y] = \emptyset$.

2. $(\mathbb{R}^2, \tau \times \tau)$ non è connesso, dato che se lo fosse lo sarebbero i suoi fattori. Proviamo quindi che $(\mathbb{R}, \tau)$ non è connesso. Osserviamo che $(-\infty, 0]$ e $(0, +\infty)$ sono aperti, infatti
$$(-\infty, 0] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n-1, -n] \quad \text{e} \quad (0, +\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n, n+1].$$
I due aperti sono disgiunti e non vuoti, quindi $(\mathbb{R}, \tau)$ non è connesso.

3. Proviamo che A è aperto e chiuso e quindi coincide con la sua chiusura e con la sua parte interna.

   A è aperto. Infatti se $(x, y) \in A$ allora $(x-1, x] \times (y-1, y] \subseteq A$. Quindi A è intorno di ogni suo punto.

   A è chiuso. Infatti la topologia τ è più fine della topologia euclidea e quindi la topologia $\tau \times \tau$ è più fine della topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$. Ma A è chiuso rispetto alla topologia euclidea e quindi è chiuso rispetto alla topologia $\tau \times \tau$.

   Si può procedere anche direttamente mostrando che se $(x, y) \in A^c$, allora $y > -x$ e si può trovare un numero $a > 0$ tale che $(x - a, x] \times (y - a, y] \subseteq A^c$.

4. La funzione non è continua. Se lo fosse il suo grafico $\Gamma = \{(x, y) \mid y = -x\}$ dotato della topologia indotta sarebbe omeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau)$. Ma Γ ha la topologia discreta, mentre $(\mathbb{R}, \tau)$ non ha punti isolati.

   Giustifichiamo queste asserzioni,

   Se $f : X \to Y$ è continua e $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ è il suo grafico, allora la funzione $F : X \to \Gamma_f$ definita da $F(x) = (x, f(x))$ è continua (dato che entrambe le coordinate lo sono) ed è invertibile con inversa $p_X|_{\Gamma_f}$ essendo $p_X : X \times Y \to X$ la proiezione sul primo fattore, che quindi è continua.

   Se $(x, y) \in \Gamma$, allora $((x - 1, x] \times (y - 1, y]) \cap \Gamma = \{(x, y)\}$ e quindi ogni punto di Γ è aperto.

   Se $x \in \mathbb{R}$, un suo intorno contiene un insieme del tipo $(a, b]$ con $a < x \leq b$ che a sua volta contiene necessariamente altri punti diversi da x (ad esempio $(x + a)/2$). Quindi la topologia τ non è quella discreta.

Esercizio 4.

1. Osserviamo che i punti di $X \times \{1\}$ sono tutti equivalenti tra loro, quindi detta $\pi : X \times I \to C(X)$ la proiezione a quoziente, $\pi(X \times \{1\})$ è costituito da un solo punto, che indichiamo con P.

   Proviamo che ogni altro punto può essere congiunto a P con un arco. Sia $[(x, s)] \in C(X)$ e consideriamo la funzione $\gamma : I \to C(X)$ definita da
$$\gamma(t) = \pi(x, 1 - t + st).$$
   γ è continua dato che è la composizione di π con la funzione $I \to X \times I$ definita da $t \mapsto (x, 1 - t + st)$ ed entrambe queste funzioni sono continue. Inoltre $\gamma(0) = \pi(x, 1) = P$ e $\gamma(1) = \pi(x, s) = [(x, s)]$.

2. X e I sono compatti, quindi $X \times I$ è compatto. Ma allora $C(X)$ è quoziente di un compatto e quindi è compatto.

3. Si consideri la funzione $f : S^2 \times I \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x,t) = (1-t)x.$$

   Osserviamo innanzitutto che f è continua e che se $(x,t) \in S^2 \times I$, allora $f(x,t) \in \mathbb{D}^3$, infatti $\|f(x,t)\| = \|(1-t)x\| = |1-t|\|x\| = |1-t| \leq 1$. Quindi f è una funzione $S^2 \times I \to \mathbb{D}^3$.

   f è surgettiva, infatti sia $y \in \mathbb{D}^3$. Si hanno due casi: o $y \neq 0$ o $y = 0$. Nel primo caso si ha $y = f(y/\|y\|, 1 - \|y\|)$, nel secondo caso si ha che $0 = f(x,1)$ per qualsiasi $x \in S^2$.

   Si dimostra infine che $f(x,t) = f(y,s)$ se e solo se $t = s = 1$ oppure $x = y$ e $t = s$ ovvero se e solo se $(x,t) \sim (y,s)$. È quindi definita una funzione a quoziente $\widetilde{f} : C(S^2) \to \mathbb{D}^3$ che è continua e bigettiva. Dato che S^2 è compatto anche $C(S^2)$ è compatto e dato che $\mathbb{D}^3$ è di Hausdorff, $\widetilde{f}$ è un omeomorfismo.