Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

3 Settembre 2018
Appello di Settembre

Il tempo per la prova è di 3 ore. Durante la prova non è permesso l'uso di appunti e libri.

Esercizio 1
Sia dato lo spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, con riferimento affine Oe_1, e_2, e_3 e coordinate x, y, z. Si considerino, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il piano α_h e la retta r di equazioni

$$\alpha_h : hx + y - (1+h)z = 2h \qquad r : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

(i) Descrivere al variare di $h \in \mathbb{R}$, la posizione reciproca di α_h e r.

(ii) Si trovino i valori di $h \in \mathbb{R}$, se esistono, per i quali α_h interseca r nel punto $P(-1, -2, 2)$ e quelli per cui la loro intersezione è $Q(1, -2, 2)$.

(iii) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane del più piccolo spazio contenente r e il punto $O(0, 0, 0)$. Si scrivano, inoltre, quelle del più piccolo spazio che contiene la retta r e α_{-1}.

Esercizio 2
Si indichi con V lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^3$, con $\mathcal{B}$ la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ dove

$$v_1 = e_1 \qquad v_2 = e_2 + e_3 \qquad v_3 = e_2 - e_1$$

e con $k \in \mathbb{C}$ un parametro. Si consideri l'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2k+2 & k+1 \\ k & -k-1 & -k-1 \\ -2k & 2k+4 & 2k+3 \end{bmatrix}$$

Si noti che $p_f(t) = -(t-1)^2(t-k-1)$.

(i) Al variare di $k \in \mathbb{C}$ si scriva esplicitamente una base per lo spazio $\langle f(v_1 + v_2), f(e_2) \rangle$ e si ricavino dei generatori per $\mathrm{Ker}(f)$.

(ii) Al variare di $k \in \mathbb{C}$ si scriva la matrice rappresentativa dell'endomorfismo f rispetto alla base canonica.

(iii) Si dica per quali valori di k, f è diagonalizzabile.

Esercizio 3
Si considerino in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ fornito di coordinate (x, y, z) le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni

$$r_{1,k}: \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + y + z + k = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \qquad r_3: \begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

e i punti $A = (1, -2, 1)$ e $B = (1, -2, 2)$, dove $k \in \mathbb{R}$.

(i) Dopo aver verificato che $A \in r_2$ e $B \in r_3$, determinare il valore di k tale per cui le tre rette passano per uno stesso punto C.

(ii) Per tale valore di k, determinare un punto D di $r_{1,k}$ tale che il tetraedro Δ di vertici A, B, C, D abbia volume uguale a 1.

(iii) Calcolare la distanza di D dal piano contenente le rette r_2 e r_3 e l'area del triangolo di vertici A, B, C.

Esercizio 4
In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ si consideri la famiglia di coniche di equazione

$$C_a : x^2 + a^2y^2 + 2ax + 2axy - 2y + 1 = 0,$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(i) Dimostrare che corrisponde sempre ad una parabola non degenere e scrivere un'affinità che porta la conica nella sua forma canonica.

(ii) Si trovino le intersezioni tra $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}' : f' = 3x^2 - 2y^2 + xy - x - y$.

Si consideri

$$\mathcal{C} : g = y^4 + x^4 - 3y^3 - 3x^2 = 0$$

ed i punti $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (\sqrt{2}, 0)$ e $P_3 = (0, 0)$.

(iii) Si calcoli $m_{P_i}(C)$, le tangenti principali in P_i e la molteplicità di intersezione di tali tangenti con la curva (specificando se ci troviamo di fronte a punti di flesso o a singolarità note).

Esame scritto di Geometria II

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2017/2018
Appello di settembre 2018

Esercizio 5
Sia $I := [0, 1)$ e si consideri lo spazio topologico $X = (I, \tau)$ dove τ è la topologia generata dalla seguente collezione di sottoinsiemi di I:

$$\{(0, \delta) \mid \delta \in (0, 1]\}.$$

Si consideri il sottospazio $Y = (\{0\} \cup (1/2, 1), \tau_Y)$ con τ_Y topologia indotta da quella su X.

(i) Dimostrare che X è connesso e T_0.

(ii) X è T_1? X è compatto? X è connesso per archi? X è uno spazio di Hausdorff?

(iii) Calcolare la chiusura di $\{0\}$ e di $\{3/4\}$ in Y.

(iv) Esibire, se possibile, un arco continuo in Y che collega 0 a 3/4.

Esercizio 6
In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ si consideri la famiglia di coniche di equazione

$$C_a : x^2 + a^2y^2 + 2ax + 2axy - 2y + 1 = 0,$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(i) Dimostrare che corrisponde sempre ad una parabola non degenere e scrivere un'affinità che porta la conica nella sua forma canonica.

(ii) Si trovino le intersezioni tra $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}' : f' = 3x^2 - 2y^2 + xy - x - y$.

Si consideri

$$\mathcal{C} : g = y^4 + x^4 - 3y^3 - 3x^2 = 0$$

ed i punti $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (\sqrt{2}, 0)$ e $P_3 = (0, 0)$.

(iii) Si calcoli $m_{P_i}(C)$, le tangenti principali in P_i e la molteplicità di intersezione di tali tangenti con la curva (specificando se ci troviamo di fronte a punti di flesso o a singolarità note).

Soluzione dell'esercizio 1 (i) Dato che siamo in uno spazio affine di dimensione 3, le nostre uniche possibilità sono che α_h e r siano paralleli, incidenti in un punto oppure r è contenuta in α_h. Per verificare al variare di $h \in \mathbb{R}$ in quale situazione ci troviamo, consideriamo l'intersezione tra le equazioni cartesiane dei due spazi, che corrisponde alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} hx + y - (1+h)z = 2h \\ x + y + 2z = 1 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Questo sistema ha sicuramente una soluzione unica quando la matrice dei coefficienti ha rango massimo, cioè 3, quindi per tutti questi casi l'unica possibilità è che la retta r ed il piano α_h siano incidenti in un punto. La matrice dei coefficienti è

$$A_h = \begin{pmatrix} h & 1 & -1-h \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha determinante nullo, solo per $h = -1$. Per distinguere le varie possibilità consideriamo la matrice completa e calcoliamo il suo rango: se esso è 3 il sistema è incompatibile e non ha soluzioni, quindi r e α_{-1} sono paralleli, altrimenti, se il rango è 2, il sistema ammette ∞^1 soluzioni, che ci dicono che r è contenuta in α_{-1}. Quindi

$$A_{-1}|b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha chiaramente rango 3, quindi per $h = -1$ α_{-1} e r sono paralleli, per $h \neq -1$, α_h e r sono incidenti in un punto.

(ii) Poiché siano incidenti nel punto P, dobbiamo verificare sia che $P \in r$, sia che $P \in \alpha_h$, ma sostituendolo nelle equazioni di r sappiamo già che $P \in r$, dobbiamo quindi solo imporre il passaggio in α_h e se $h \neq -1$, allora dal punto precedente sappiamo già che sono incidenti in P. Allora

$$-h - 2 - 2(1+h) = 2h \Longleftrightarrow h = -\frac{4}{5}.$$

Quindi r e $\alpha_{-\frac{4}{5}}$ sono incidenti in P. Per quanto riguarda Q, notiamo che $Q \notin r$, allora non esiste nessun $h \in \mathbb{R}$ per cui r e α_h sono incidenti in Q.

(iii) Notiamo che $O \notin r$, quindi il più piccolo spazio che contiene O e r è dato dal fascio di piani passante per r e O:

$$\lambda(x + y + 2z - 1) + \mu(x - y - 1) = 0 \xrightarrow{\text{passaggio per } O} \lambda = -\mu,$$

quindi il piano cercato ha equazione cartesiana $y + z = 0$, che in forma parametrica è equivalente a

$$\begin{cases} x = u \\ y = -v \\ z = v. \end{cases}$$

Mentre, per quanto riguarda il più piccolo piano contente α_{-1} e r, sappiamo che in questo caso sono due spazi paralleli, quindi la giacitura dello spazio che le contiene è data dalla giacitura del piano ed il vettore che le congiunge, ma in questo modo avremmo tre vettori indipendenti in uno spazio di dimensione 3, allora il più piccolo spazio che li contiene entrambi è tutto $\mathbb{R}^3$.

Soluzione dell'esercizio 2
Dalle relazioni

$$v_1 = e_1 \qquad v_2 = e_2 + e_3 \qquad v_3 = e_2 - e_1$$

ricaviamo facilmente quelle che ci permettono di passare dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica:

$$e_1 = v_1 \qquad e_2 = v_1 + v_3 \qquad e_3 = -v_1 + v_2 - v_3.$$

Denotiamo con x, y e z le coordinate rispetto alla base canonica e x', y' e z' le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Calcoliamo l'immagine w di $v_1 + v_2$ rispetto a f:

$$\begin{aligned} w := f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) &= (v_1 + kv_2 - 2kv_3) + ((2k+2)v_1 + (-k-1)v_2 + (2k+4)v_3) = \\ &= (2k+3)v_1 - v_2 + 4v_3 = (2k+3)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2k-1\\3\\-1\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

In modo analogo abbiamo

$$\begin{aligned} w_2 := f(e_2) = f(v_1+v_3) = f(v_1)+f(v_3) &= (v_1+kv_2-2kv_3)+((k+1)v_1+(-k-1)v_2+(2k+3)v_3) = \\ &= (k+2)v_1 - v_2 + 3v_3 = (k+2)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k-1\\2\\-1\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Si vede facilmente che, indipendentemente da k abbiamo che i due vettori sono indipendenti (ad esempio poichè la matrice dei coefficienti dei due vettori ha rango 2) quindi una base per $\langle f(v_1+v_2), f(e_2)\rangle$ è $\{w, w_2\}$.

Dal testo dell'esercizio sappiamo che lo spettro di f è $\{1, 1+k\}$. In particolare, se $k \neq -1$ allora $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Se invece $k = -1$ avremo $\mu_a(0) = 1$ e quindi $\mu_g(0) = 1$. Poniamo quindi $k = -1$ e ricaviamo un generatore del nucleo. Per $k = -1$ si ha

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\\2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

quindi il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x' = 0 \\ 2x' + 2y' + z' = 0 \end{cases}$$

cioè tutti i vettori $x'v_1 + y'v_2 + z'v_3$ con $x' = 0$ e $z' = -2y'$:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{a(v_2 - 2v_3) \,|\, a \in \mathbb{R}\} = \langle v_2 - 2v_3\rangle = \langle 2e_1 - e_2 + e_3\rangle = \left\langle \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} \right\rangle.$$

Calcoliamo l'immagine dei vettori della base canonica. Conosciamo già l'immagine w_2 di e_2: ci rimangono da ricavare le immagini w_1 e w_3 rispettivamente di e_1 e e_3. Abbiamo

$$\begin{aligned} w_1 := f(e_1) = f(v_1) = (v_1 + kv_2 - 2kv_3) = \\ = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - 2k\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+2k\\-k\\k\end{bmatrix} \\ w_3 := f(e_3) = f(-v_1 + v_2 - v_3) = kv_1 - kv_2 + (1+2k)v_3 = \\ = k\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - k\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + (1+2k)\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-k-1\\k+1\\-k\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da cui ricaviamo la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica:

$$M_{\mathcal{B}_{can}}(f) = \begin{bmatrix}1+2k & k-1 & -k-1\\-k & 2 & k+1\\k & -1 & -k\end{bmatrix}$$

Occupiamoci di stabilire quando f è diagonalizzabile. Dal polinomio caratteristico possiamo concludere che

$$k=0 \Longrightarrow \mu_a(\lambda)=\begin{cases}3 & \lambda=1\\ 0 & \lambda\neq 1\end{cases} \qquad k\neq 0 \Longrightarrow \mu_a(\lambda)=\begin{cases}2 & \lambda=1\\ 1 & \lambda=k+1\\ 0 & \lambda\neq 1, k+1\end{cases}$$

Ricaviamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 1. Per farlo, risolviamo il sistema $(M_{\mathcal{B}}(f)-I)\underline{x}'=0$, cioè

$$\begin{bmatrix}0 & 2k+2 & k+1\\ k & -k-2 & -k-1\\ -2k & 2k+4 & 2k+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Operiamo sulle righe della matrice:

$$\begin{bmatrix}0 & 2k+2 & k+1\\ k & -k-2 & -k-1\\ -2k & 2k+4 & 2k+2\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}0 & 2k+2 & k+1\\ k & k & 0\\ -2k & -2k & 0\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}0 & 2k+2 & k+1\\ k & k & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

che ci permette di scrivere il sistema equivalente

$$\begin{cases}(k+1)(2y'+z')=0\\ k(x'+y')=0\end{cases}$$

Distinguiamo 3 casi.

- Se $k=0$, abbiamo $\mathrm{Rk}(M_{\mathcal{B}}(f)-I)=1$ da cui otteniamo $\mu_g(1)=2\neq 3=\mu_a(1)$: f non è diagonalizzabile per $k=0$.
- Se $k=-1$, abbiamo $\mathrm{Rk}(M_{\mathcal{B}}(f)-I)=1$. Come per il caso precedente da questo segue $\mu_g(1)=2=\mu_a(1)$. L'altro autovalore, 0 ha molteplicità algebrica e geometrica 1 quindi per $k=-1$ si ha che f è diagonalizzabile.
- Se $k\neq 0,-1$, abbiamo $\mathrm{Rk}(M_{\mathcal{B}}(f)-I)=2$. Quindi $\mu_g(1)=1\neq 2=\mu_a(1)$. Quindi f non è diagonalizzabile in questo caso.

Per riassumere, f è diagonalizzabile se e solo se $k=-1$.

Soluzione dell'esercizio 3 (i) Affinchè le tre rette passino per un solo punto deve esserci un'unica soluzione al sistema

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\ x+y+z+k=0\\ x-z=0\\ x+y+1=0\\ 2x-z=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}2x+y+1=0\\ x+y+z+k=0\\ z=x\\ z=2x\\ x+y+1=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}k=1\\ x=0\\ y=-1\\ z=0\end{cases}$$

e di conseguenza k deve essere uguale ad 1 e il punto C è $(0,-1,0)$.

(ii) Per determinare il volume del tetraedro abbiamo due strade:

Primo Metodo

Sappiamo che, dati i tre lati a,b,c adiacenti ad un vertice scelto del tetraedro il volume di questo sarà dato da

$$V=\frac{|(a\times b)\cdot c|}{6}$$

a questo punto, scelto il vertice A abbiamo $a = B - A = (0, 0, 1)$, $b = C - A = (-1, 1, -1)$ e, detto $D = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $c = D - A = (\hat{x} - 1, \hat{y} + 2, \hat{z} - 1)$. Ora

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix} = (-1, -1, 0)$$

e di conseguenza

$$V = \frac{|(-1, -1, 0) \cdot (\hat{x} - 1, \hat{y} + 2, \hat{z} - 1)|}{6} = \frac{|-\hat{x} - \hat{y} - 1|}{6}.$$

Imponendo $V = 1$, $D \in r_{1,1}$ e supponendo $-\hat{x} - \hat{y} - 1 \geq 0$ abbiamo

$$\begin{cases} \hat{x} = -\hat{y} - 7 \\ -2\hat{y} - 14 + \hat{y} + 1 = 0 \\ -\hat{y} - 7 + \hat{y} + \hat{z} + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{x} = 6 \\ \hat{y} = -13 \\ \hat{z} = 6 \end{cases}$$

e quindi il punto cercato è $D = (6, -13, 6)$.

Secondo Metodo

Iniziamo calcolandoci l'area del triangolo contenuto nel piano $x + y + 1 = 0$ (e quindi rispondendo a una delle domande poste nel quesito successivo) e per far questo troviamo i lati del triangolo in questione

$$\begin{aligned} a &= B - A = (0, 0, 1) \\ b &= C - A = (-1, 1, -1) \\ Area_{ABC} &= \frac{||a||||b|| \sin(\theta)}{2} = \frac{||a \times b||}{2} = \frac{||(-1, -1, 0)||}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

dove θ è l'angolo formato da r_2 e r_3. Per ottenere il volume in funzione di D dobbiamo trovare l'altezza del tetraedro, che altro non è che la distanza del punto $D = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ dal piano contenente le due rette $\pi : x + y + 1 = 0$

$$h = d(D, \pi) = \frac{|\hat{x} + \hat{y} + 1|}{\sqrt{2}}$$

da quindi abbiamo

$$V = \frac{Area_{ABC} * h}{3} = \frac{|\hat{x} + \hat{y} + 1|\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{|\hat{x} + \hat{y} + 1|}{6}$$

che vogliamo essere unitario. A questo punto, imponendo l'appartenenza di tale punto a $r_{1,1}$ e supponendo $x + y + 1 \geq 0$

$$\begin{cases} \hat{x} + \hat{y} + 1 = 6 \\ 2\hat{x} + \hat{y} + 1 = 0 \\ \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{x} = -\hat{y} + 5 \\ -2\hat{y} + 10 + \hat{y} + 1 = 0 \\ -\hat{y} + 5 + \hat{y} + \hat{z} + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{x} = -6 \\ \hat{y} = 11 \\ \hat{z} = -6 \end{cases}$$

da cui abbiamo che il punto cercato è dato da $D = (-6, 11, -6)$, da cui $d(D, \pi) = 3\sqrt{2}$.

Nota: Supponendo $\hat{x} + \hat{y} + 1 < 0$ avremmo ottenuto il punto D trovato col primo metodo, questo non è strano visto che ci sono per ovvi motivi due punti su $r_{1,1}$ che soddisfano la richiesta. Stesso discorso per il punto trovato col primo metodo.

(iii) Abbiamo già risolto questo punto con il secondo metodo, mentre con il primo semplicemente basta trovare l'area di base e da questa ottenere $d(D, \pi) = \frac{3V}{Area_{ABC}}$.

Soluzione dell'esercizio 4 (i) La matrice associata alla conica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & a \\ -1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

con

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Se calcoliamo i determinanti di tali matrici abbiamo che $\det A_0 = 0$, mentre $\det A = -(a^2+1)^2$. Di conseguenza abbiamo che la conica sarà una parabola non degenere di equazione $y^2 - x = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Per scrivere l'affinità che porta in forma canonica la conica basta notare che

$$x^2 + a^2y^2 + 2axy + 2ax - 2y + 1 = (x+ay)^2 - (2y - 2ax - 1) = 0$$

di conseguenza la trasformazione che cerchiamo sarà data dall'inversa di

$$\begin{cases} x' = x + ay \\ y' = -2ax + 2y - 1 \end{cases},$$

ovvero

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a^2+1}(x' - \frac{a}{2}(y'+1)) \\ y = \frac{1}{a^2+1}(ax' + \frac{1}{2}(y'+1)) \end{cases}.$$

(ii) Detti $f_0 = x^2 - 2y + 1$ e $f' = 3x^2 - 2y^2 + xy - x - y$ ci sono due possibilità per procedere:

Primo Metodo

Calcoliamo il risultante tra f_0 e f' rispetto a una delle due variabili

$$\begin{aligned} R(f_0, f')_x = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2y+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2y+1 \\ 3 & y-1 & -2y^2-y & 0 \\ 0 & 3 & y-1 & -2y^2-y \end{pmatrix} &= 4y^4 - 22y^3 + 42y^2 - 34y + 10 \\ &= (y-1)^3\left(y - \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} R(f_0, f')_y = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & x^2+1 \\ -2 & x-1 & 3x^2-x & 0 \\ 0 & -2 & x-1 & 3x^2-x \end{pmatrix} &= -2x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 2x - 4 \\ &= (x-2)(x-1)(x+1)^2 \end{aligned}$$

dal quale otteniamo che i punti di intersezione tra le due coniche sono $(-1,1)$, $(1,1)$, e $\left(2, \frac{5}{2}\right)$.

Secondo Metodo

In alternativa possiamo esplicitare la y nell'equazione di f_0 e sostituirla in f', ottenendo

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 2y^2 + xy - x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \\ (x-2)(x-1)(x+1)^2 = 0 \end{cases}$$

che ci dà gli stessi punti trovati con il metodo precedente (in realtà quello che abbiamo trovato è proprio $R(f_0, f')_y$).

(iii) Andando a sostituire le coordinate dei punti nell'equazione della curva abbiamo che $P_1, P_2 \notin \mathcal{C}$ mentre $P_3 \in \mathcal{C}$, quindi possiamo dire che $m_{P_1}(\mathcal{C}) = m_{P_2}(C) = 0$ e non dobbiamo studiare altro in tale punto. Calcoliamo le derivate di f

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4x^3 - 6x$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4y^3 - 9y$$

e ricaviamo che P_3 risulta essere un punto singolare. Visto che la forma di grado minore in f è $-3x^2$, P_3 è punto doppio con unica tangente principale data da $x = 0$, calcoliamo la molteplicità di intersezione di questa con $\mathbb{C}$ trovando la molteplicità di $t = 0$ come soluzione di

$$g(0,t) = t^4 - 3t^3 = t^3(t-1)$$

che è pari a 3, di conseguenza P_3 è una cuspide.

Soluzione dell'esercizio 5
La topologia τ è composta, oltre che da X e dall'insieme vuoto, di tutti e soli gli insiemi del tipo $(0,\delta)$ con $\delta \in (0,1]$. Questo vuol dire che ogni aperto di X è anche un aperto di (I, τ_e) dove τ_e è la topologia indotta da quella euclidea su I. Siamo quindi di fronte a due topologie confrontabili con quella di X che è più debole. Tra le varie conseguenze di questo fatto, abbiamo che ogni funzione $f : [0,1] \to I$ (stiamo munendo $[0,1]$ della topologia euclidea) che è continua per la topologia euclidea è continua con τ. In particolare, siccome (I, τ_e) è connesso per archi, anche X lo è. Lo stesso vale per la connessione.

Mostriamo che X è T_0. Siano a, b due punti distinti di X. Se $a = 0$ allora ogni intorno di b diverso da X non contiene a. Se entrambi sono diversi da 0 posso assumere $a < b$: l'insieme $(0,(a+b)/2)$ è un aperto in X che contiene a ma non b. Abbiamo mostrato che per ogni coppia di punti esiste un aperto che contiene uno dei due ma non l'altro: questa è la definizione di spazio topologico T_0.

X è compatto infatti se $\{U_j\}_{j\in J}$ è una collezione di aperti di X che copre X allora esiste almeno un $\bar{j} \in J$ tale che $0 \in U_{\bar{j}}$. Ma l'unico aperto di X che contiene 0 è X quindi ogni ricoprimento aperto contiene X. Un sottoricoprimento finito è quindi $\{U_{\bar{j}}\} = \{X\}$.

Mostrare che $P = \{3/4\}$ non è chiuso è semplice infatti il suo complementare non è aperto. Questo basta per concludere che X non è T_1 (e di conseguenza nemmeno di Hausdorff). Siccome gli aperti non banali sono tutti e soli gli insiemi del tipo $(0,\delta)$, i chiusi in X diversi da X e dal vuoto sono del tipo

$$\{0\} \cup [\delta, 1)$$

con $\delta \in (0,1]$ e $\{0\}$. I chiusi di Y sono della stessa forma con $\delta \in (1/2, 1]$. Di conseguenza la chiusura di P in Y è $\overline{P} = \{0\} \cup [3/4, 1)$.

Il punto $Q = \{0\}$ è chiuso in X infatti il suo complementare è $(0,1)$ che è un aperto. Di conseguenza Q è anche un chiuso in Y infatti $Q = Q \cap Y$ (tutti i chiusi di Y sono di questo tipo).

Si consideri l'arco $f : [0,1] \to Y$ tale che $f(0) = 0$ e $f(t) = 1/2 + t/4$ (si ha quindi $f(1) = 3/4$). Mostriamo che f è un arco continuo in Y. Definiamo, per comodità, $U_\delta = (1/2, \delta)$ con $\delta \in (1/2, 1]$ e $U_0 = Y$. Questi sono tutti e soli gli aperti non vuoti di Y. Si ha

$$f^{-1}(U_\delta) = \begin{cases} \text{se } \delta = 0 & f^{-1}(Y) = [0,1] \\ \text{se } \delta < 3/4 & (0, 4\delta - 2) \\ \text{se } \delta \geq 3/4 & (0,1] \end{cases}$$

quindi la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di $[0,1]$ con la topologia indotta da quella euclidea: f è un arco continuo in Y che collega 0 e 3/4.

Soluzione dell'esercizio 6
Si veda la soluzione dell'Esercizio 4.