Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2011/2012

02 luglio 2012

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^3$ il 3-spazio euclideo dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z) e sia $r_1(k)$ la retta passante per i punti

$$P_1(k) = (1, 0, k), \quad P_2 = (2, 1, -1).$$

Sia r_2 la retta definita da:

$$r_2 : \begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} .$$

Si risponda ai seguentei quesiti

(1) Si determinino i valori di k tali per cui le rette $r_1(k)$ e r_2 siano complanari.
(2) Per i valori di k determinati al punto (1), calcolare l'equazione cartesiana del piano π che contiene entrambe le rette.
(3) Per i valori di k determinati al punto (1), calcolare l'angolo convesso determinato dalle due rette.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ il piano euclideo reale dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y). Definiamo la conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ come

$$\mathcal{C} : \quad x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x - 4y + 2 = 0$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si calcoli la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ determinando un'isometria diretta $S : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ di $\mathbb{E}^2$ tale che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.
(2) Si calcolino gli eventuali assi di simmetria di $\mathcal{C}$.

Esercizio 3. Si dica, motivando la risposta, quali tra i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tra loro omeomorfi e quali no.

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 1 \geq 0\}$$
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y \geq 0\}$$
$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy + 3 \geq 0\}$$

Esercizio 4. Si considieri $\mathbb{R}^2$ munito della *metrica delle valli*, la quale , se $x = (x^1, x^2)$ e $y = (y^1, y^2)$, è definita da

$$d(x, y) := \begin{cases} |y^2 - x^2| & \text{se } x^1 = y^1 \\ |x^2| + |x^1 - y^1| + |y^2| & \text{se } x^1 \neq y^1 \end{cases} ,$$

dove $|\cdot|$ denota la metrica euclidea standard, e sia $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x^1| + |x^2| \leq 1\}$, il rombo equilatero di lato $\sqrt{2}$ centrato nell'origine.

(1) Si dimostri che X è chiuso e limitato.
(2) Si dimostri che X non è compatto.

Soluzioni

※ Esercizio 1.

Per calcolare l'equazione della retta $r_1(k)$ possiamo osservare che la sua direzione è data dal vettore

$$v_1(k) = \overrightarrow{P_1(k)P_2} = (2, 1, -1) - (1, 0, k) = (1, 1, -1-k).$$

Di conseguenza, un'equazione parametrica per $r_1(k)$ è

$$r_1(k) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t - tk \end{cases}.$$

Un'equazione cartesiana è data invece da

$$r_1(k) = \begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ kx + y + z - 2k = 0 \end{cases}.$$

L'equazione parametrica della retta r_2

$$r_2 : \begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases}.$$

è data invece da

$$r_2 : \begin{cases} x = s \\ y = -3s + 2 \\ 2z = y - s \end{cases} \to \begin{cases} x = s \\ y = -3s + 2 \\ 2z = -4s + 2 \end{cases} \Rightarrow \quad r_2 : \begin{cases} x = s \\ y = 2 - 3s \\ z = 1 - 2s \end{cases}$$

Procediamo con l'esercizio.

(1) Le due rette $r_1(k)$ e r_2 sono complanari se e solo se si intersecano oppure se sono parallele. Consideriamo dunque il sistema

$$\begin{cases} x = 2 + t = s \\ y = 1 + t = 2 - 3s \\ z = -1 - t - tk = 1 - 2s \end{cases} \to \begin{cases} s = 2 + t \\ 1 + t = 2 - 6 - 3t \\ -1 - t - tk = 1 - 4 - 2t \end{cases} \to \begin{cases} s = 2 + t \\ 4t = -5 \\ (k-1)t = 2 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} s = \frac{3}{4} \\ t = -\frac{5}{4} \\ k = \frac{2}{t} + 1 \end{cases} \to k = -\frac{8}{5} + 1 = -\frac{3}{5}$$

Per $k = -\frac{3}{5}$ le due rette si intersecano e sono dunque complanari. Se invece $k \neq -\frac{3}{5}$ le due rette non si intersecano e potrebbero essere parallele oppure sghembe. Consideriamo le direzioni delle due rette:

$$v_1(k) = (1, 1, -1-k), \qquad v_2 = (1, -3, -2).$$

Qualunque sia il valore di k, i due vettori delle direzioni non saranno mai proporzionali (perché le prime due componenti non lo sono). Di conseguenza, le due rette non saranno mai parallele.

Possiamo dunque concludere che $r_1(k)$ e r_2 sono complanari se e solo se $k = -\frac{3}{5}$.

(2) Riscriviamo l'equazione parametrica della retta r_1 con il valore del parametro k identificato al punto precedente:

$$r_1(k) = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - \frac{2}{5}t \end{cases}.$$

Il piano π contenente le due rette è il piano generato dai vettori $v_1\left(-\frac{3}{5}\right)$ e v_2 e passante per uno dei punti appartenenti alle rette, per esempio $P_2 = (2, 1, -1)$. Ogni punto del piano π sarà dunque del tipo

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{cases} x = 2 + s + t \\ y = 1 + s - 3t \\ z = -1 - \frac{2s}{5} - 2t \end{cases}.$$

Dobbiamo ora trovare l'equazione cartesiana:

$$\begin{cases} x - 2 - t = s \\ y = 1 + (x - 2 - t) - 3t \\ 5z = -5 - 2(x - 2 - t) - 10t \end{cases} \to \begin{cases} --- \\ y = x - 1 - 4t \\ 5z = -2x - 1 - 8t \end{cases} \to \begin{cases} --- \\ --- \\ 2y - 5z = 4x - 1 \end{cases}$$

e dunque

$$\pi : \qquad 4x - 2y + 5z - 1 = 0.$$

(3) Ricordiamo che i vettori di direzione di $r_1\left(-\frac{3}{5}\right)$ e r_2 sono rispettivamente

$$v_1 = \left(1, 1, -\frac{2}{5}\right), \qquad v_2 = (1, -3, -2).$$

L'angolo convesso ϕ determinato dalle due rette è quell'angolo $\phi \in [0, \pi]$ verificante

$$\cos\phi = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{||v_1|| \cdot ||v_2||} = \frac{1 - 3 + \frac{4}{5}}{\sqrt{1 + 1 + \frac{4}{25}}\sqrt{1 + 9 + 4}} =$$

$$\frac{-\frac{6}{5}}{\sqrt{\frac{54}{25}}\sqrt{14}} = -\frac{6}{\sqrt{54 \cdot 14}} = -\frac{6}{\sqrt{7 \cdot 3^3 \cdot 2^2}} = -\frac{1}{\sqrt{21}}.$$

Si ha dunque

$$\phi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{21}}\right) \approx 1,79 \approx 0,57\pi \approx \frac{3}{5}\pi.$$

※ Esercizio 2.

(1) Consideriamo le matrici associate alla conica $\mathcal{C}$ date da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -(-2+24) = -22 \neq 0$$

La conica $\mathcal{C}$ è dunque non degenere. Calcolando anche

$$\det A_0 = -2 - 4 = -6 < 0$$

si vede come $\mathcal{C}$ sia un'iperbole.

Per determinare la forma canonica e la trasformazione richiesta, partiamo determinando la rotazione. Calcoliamo quindi una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ diagonale per A_0 e concordemente orientata con quella canonica di $\mathbb{R}^2$. Il polinomio caratteristico di A_0 è dato da

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(2+\lambda) - 4 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2)$$

Gli autovalori di A_0 sono dunque $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. I corrispondenti autovettori, già normalizzati, sono

$$v_1 := \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Controlliamo l'orientazione:

$$\det(v_1 \quad v_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = -1$$

La base cercata è dunque $\mathcal{B} = (v_2, v_1)$.

Definiamo la matrice $M \in SO(2)$ come

$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

La rotazione indotta da M è

$$R : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 \\ -2x_1 + y_1 \end{pmatrix}$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$ troviamo l'equazione di $R^{-1}(\mathcal{C})$, data da

$$0 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}x_1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}y_1\right)^2 - 2\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}y_1\right)^2 +$$

$$+4\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x_1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}y_1\right)\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}y_1\right) + 2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x_1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}y_1\right) -$$

$$-4\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}y_1\right) + 2$$

Termini di secondo grado:

$$\frac{1}{5}\left(x_1^2 + 4y_1^2 - 8x_1^2 - 2y_1^2 - 8x_1^2 + 8y_1^2\right) = \frac{1}{5}\left(-15x_1^2 + 10y_1^2\right) = -3x_1^2 + 2y_1^2$$

Termini di primo grado:

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(2x_1 + 4y_1 + 8x_1 - 4y_1\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}10x_1 = 2\sqrt{5}x_1$$

Quindi

$$R^{-1}(\mathcal{C}): -3x_1^2 + 2y_1^2 + 2\sqrt{5}x_1 + 2 = 0$$

Riscriviamo il termine in x_1:

$$-3\left(x_1^2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}x_1\right) = -3\left(x_1^2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}x_1 + \frac{5}{9}\right) + \frac{5}{3} = -3\left(x_1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}$$

e dunque

$$R^{-1}(\mathcal{C}): -3\left(x_1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + 2y_1^2 + \frac{11}{3} = 0$$

Definiamo l'isometria diretta $T: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ come

$$T: \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{\sqrt{5}}{3} \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Sostituendo si ottiene l'equazione

$$\mathcal{D}: \quad -3x_2^2 + 2y_2^2 + \frac{11}{3} = 0$$

la quale corrisponde alla forma canonica

$$\mathcal{D}: \quad \frac{9}{11}x_2^2 - \frac{6}{11}y_2^2 = 1.$$

Osservando i passaggi fatti, si ha $\mathcal{D} = T \circ R^{-1}(\mathcal{C})$, ovvero $S = T \circ R^{-1}$. Ricaviamo R^{-1} da

$$R^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

e dunque $S = T \circ R^{-1}$ è dato da

$$S: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}y - \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y \end{pmatrix}.$$

(2) Poiché gli assi di simmetria di $\mathcal{D}$ sono dati dalle equazioni $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$, le equazioni degli assi di simmetria di $\mathcal{C}$ sono date da

$$\frac{\sqrt{5}}{5}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}y - \frac{\sqrt{5}}{3} = 0, \qquad \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y = 0$$

cioè

$$3x - 6y - 5 = 0, \qquad 2x + y = 0$$

※ Esercizio 3.

Dobbiamo determinare se i tre spazi

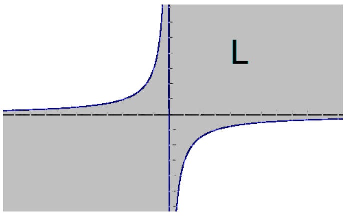
$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 1 \geq 0\}$$
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y \geq 0\}$$
$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy + 3 \geq 0\}$$

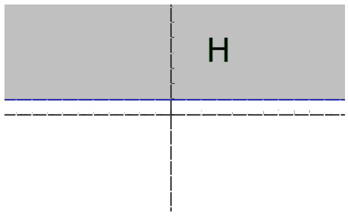
siano o meno omeomorfi tra di loro.

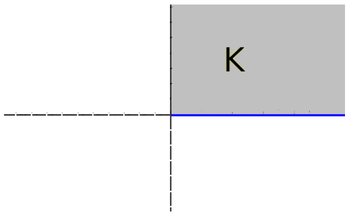
I tre spazi sono raffigurati nella seguente figura.

I due spazi H e K sono omeomorfi. Un omeomorfismo è dato da

$$f: H \to K, \qquad f(x, y) = (e^x, y - 1),$$







la cui inversa è

$$f^{-1} : K \to H, \qquad (x, y) \mapsto (\log x, y + 1).$$

Sia f che f^{-1} sono note funzioni continue. Inoltre la funzione e^x manda biiettivamente tutto $\mathbb{R}$ nell'intervallo $(0, \infty)$ e, analogamente, la funzione $y - 1$ manda biiettivamente l'intervallo $[1, \infty)$ nell'intervallo $[0, \infty)$. Poiché si ha

$$H = \mathbb{R} \times [1, \infty), \qquad K = (0, \infty) \times [0, \infty)$$

ciò dimostra che la funzione f è l'omeomorfismo cercato.

Possiamo invece dimostrare che H e L non sono omeomorfi, utilizzando il fatto che se $X \sim Y$ allora $\partial X \sim \partial Y$. In questo caso si ha

$$\begin{aligned} \partial L &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = -3\} \\ \partial H &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}. \end{aligned}$$

Poiché ∂L è sconnesso mentre ∂H non lo è, si può concludere che $\partial L \nsim \partial H$ e dunque che

$$L \nsim H, \qquad L \nsim K.$$

Infatti ∂H è una retta (e dunque connesso) mentre ∂L è un iperbole ed è sconnessa in quanto scrivibile come unione di due aperti disgiunti, per esempio, del tipo

$$\partial L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = -3\} = \Big(\partial L \cap \big((-\infty, 0) \times (0, \infty)\big)\Big) \cup \Big(\partial L \cap \big((0, \infty) \times (-\infty, 0)\big)\Big).$$

※ **Esercizio 4.**

(1) Osserviamo innanzitutto che

$$|x|_d = d(x, 0) = \begin{cases} |x^2| & \text{se } x^1 = 0 \\ |x^1| + |x^2| & \text{se } x^1 \neq 0 \end{cases} = |x^1| + |x^2|.$$

L'insieme X è quindi semplicemente la palla chiusa

$$\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ d(x, 0) \leq 1\}$$

di centro zero e raggio 1 nella metrica d. Ciò dimostra sia la chiusura sia la limitatezza.

(2) Essendo in uno spazio metrico, un insieme è compatto se e solo se è compatto per successioni. Cerchiamo quindi una successione $\{x_n\} \subset X$ che non ammetta alcuna sottosuccessione convergente. Chiaramente tale successione "muoversi in diagonale" in modo che ogni due elementi della successione abbiano prime coordinate tra loro diverse (altrimenti, la distanza tra essi sarebbe semplicemente la distanza euclidea e sappiamo che X nella metrica euclidea è compatto) e deve sfruttare il fatto che gli elementi abbiano la seconda coordinata "grossa" (è questa coordinata che pesa molto nel calcolo della distanza).

Definisco $\{x_n\}$ come

$$x_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \qquad n \geq 1.$$

La successione è dunque del tipo

$$x_1 = (1, 0)\,, \quad x_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad x_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad x_4 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \quad \cdots$$

Controlliamo che $\{x_n\} \subset X$:

$$d(x_n, 0) = |x_n^1| + |x_n^2| = \left|\frac{1}{n}\right| + \left|1 - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} = 1 \leq 1. \tag{1}$$

Di conseguenza $\{x_n\} \subset X$.

Osserviamo che $x_n^1 \neq x_m^1$ ogniqualvolta $n \neq m$.

Supponiamo ora che esista una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \in X$ convergente a un certo $y \in X$. Tuttavia, qualunque sia y, per quanto detto prima può esistere al massimo un unico valore di k tale per cui $y^1 = x_{n_k}^1$. Di conseguenza, per tutti i k tranne al massimo uno si avrebbe

$$d(x_{n_k}, y) = \left|\frac{n_k - 1}{n_k}\right| + \left|\frac{1}{n_k} - y_1\right| + |y_2|$$

ed il primo termine è $\geq \frac{1}{2}$ per $n_k \geq 2$. Di conseguenza

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y) \geq \frac{1}{2}$$

il che contraddice l'ipotesi $y = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Abbiamo esibito una successione priva di sottosuccessioni convergenti. Ciò dimostra che X non è compatto.