Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2011/2012

06 settembre 2012

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ il 3-spazio proiettivo reale dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Definiamo le rette proiettive $r_0(k), r_1, r_2(k)$ come

$$r_1(k) : \begin{cases} x_0 + kx_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 - x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \qquad r_2(k) = \begin{cases} -x_0 + 2x_1 - kx_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Si risponda ai seguenti quesiti: determinare i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali per cui

(1) le rette $r_1(k)$ e $r_2(k)$ siano sghembe.
(2) le rette $r_1(k)$ e $r_2(k)$ siano incidenti non coincidenti.
(3) la retta $r_1(k)$ sia contenuta nel piano proiettivo R di equazione $x_2+x_3 = 0$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ lo spazio affine reale dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z). Definiamo la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ come

$$\mathcal{Q} : \quad x^2 - 5y^2 + 9z^2 + 4yz - 2x + 6y - 1 = 0$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si calcoli la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{Q}$ determinando un'affinità $S : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tale che $S(\mathcal{Q}) = \mathcal{D}$.

Esercizio 3. Dire, motivando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono o meno omeomorfi tra di loro:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x^2 - y^2 - 3 = 0\},$$
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + 3y - 1 = 0\},$$
$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + (y - 3)^2 - 1 = 0\}.$$

Esercizio 4. Si consideri $\mathbb{R}^2$ munito della topologia euclidea e la relazione di equivalenza definita da

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' \in \mathbb{Z}, \quad y = y'.$$

Si dimostri che $X = \mathbb{R}^2/\sim$ è omeomorfo al prodotto $C \times \mathbb{R}$, dove $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.

Soluzioni

※ Esercizio 1.

(1) Nel caso proiettivo, due rette sono sghembe se e solo se non si intersecano, cioè se e solo se il sistema lineare

$$\begin{cases} x_0 + kx_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 - x_1 + x_2 = 0 \\ -x_0 + 2x_1 - kx_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

ammette come unica soluzione la soluzione nulla, il che equivale a chiedere

$$\det \begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Svolgendo i calcoli

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -k \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -1-k & 0 \\ 0 & 2+k & -k+1 \end{vmatrix} = (-1-k)(1-k) - 0 = -1 + k^2$$

Le due rette sono sghembe se e solo se

$$k^2 \neq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k \neq \pm 1$$

(2) Le due rette sono incidenti se e solo se $k = \pm 1$. In questo caso, sono non coincidenti se e solo se il rango della matrice sopra scritta è 3 (cioè se e solo se le equazioni definenti le due due rette non sono proporzionali). Per $k = 1$ si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedendo con il metodo di eliminazione di Gauss si vede che

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 \\ 0 & -1-k & 3 & 1 \\ 0 & 2+k & -k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per $k = \pm 1$ si ottiene

$$k = 1 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k = -1 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

In ambedue i casi le matrici hanno rango 3 e dunque le due rette sono incidenti non coincidenti.

(3) Osserviamo che la retta $r_2(k)$ è contenuta nel piano R per qualsiasi valore di k. Per $k \neq \pm 1$ le due rette sono sghembe e dunque $r_1(k) \nsubseteq R$, altrimenti la formula di Grassman proiettiva forzerebbe $r_1(k)$ e $r_2(k)$ ad avere intersezione non vuota. Per $k = \pm 1$ le due rette sono invece incidenti. Osserviamo che, per $k = -1$,

$$r_1(-1) : \begin{cases} x_0 - x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 - x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

e sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene proprio l'equazione del piano proiettivo R. Dunque, per $k = -1$ si ha $r_1(k) \subset R$. Per $k = 1$ osserviamo invece che la matrice ottenuta dall'equazione della retta $r_1(1)$ e del piano R ha rango 3. Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ciò significa che $r_1(1) \nsubseteq R$.

In conclusione, $r_1(k) \subseteq R$ se e solo se $k = -1$.

※ Esercizio 2.

(1) Consideriamo le matrici associate alla quadrica $\mathcal{Q}$ date da

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Calcolando i determinanti si ottiene:

$$\det A = 17 \qquad \det A_0 = -49$$

La quadrica $\mathcal{Q}$ è dunque non degenere.

Gli autovalori di A_0 sono due positivi ed uno negativo, in particolare $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{53}$. Essendo $\det A > 0$ la forma canonica sarà del tipo

$$\mathcal{D} : \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

(2) Calcoliamo la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ procedendo con il metodo del completamento dei quadrati.

$$\mathbf{x^2} - 5y^2 + 9z^2 + 4yz - \mathbf{2x} + 6y - 1 =$$
$$= (\mathbf{x - 1})^\mathbf{2} - \mathbf{1} - 5y^2 + 9z^2 + 4yz + 6y - 1 =$$
$$= (x-1)^2 - 5y^2 + \mathbf{9z^2} + \mathbf{4yz} + 6y - 2 =$$
$$= (x-1)^2 + \left(\mathbf{3z} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{y}\right)^\mathbf{2} - \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}\mathbf{y^2} - 5y^2 + 6y - 2 =$$
$$= (x-1)^2 + \left(3z + \frac{2}{3}y\right)^2 - \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{9}}\mathbf{y^2} + \mathbf{6y} - 2 =$$
$$= (x-1)^2 + \left(3z + \frac{2}{3}y\right)^2 - \left(\frac{7}{3}y + \frac{9}{7}\right)^2 - \frac{17}{49}.$$

Definiamo la trasformazione $S : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ come

$$S : (x, y, z) \mapsto (x_1, y_1, z_1)$$

con

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{7}{\sqrt{17}} (x-1) \, , \frac{7}{\sqrt{17}} \left(3z + \frac{2}{3} y \right) , \frac{7}{\sqrt{17}} \left(\frac{7}{3} y + \frac{9}{7} \right) \right).$$

Otteniamo così la quadrica in forma canonica $\mathcal{D}$ data da $\mathcal{D} = S(\mathcal{Q})$:

$$\mathcal{D} : \qquad x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 = 1.$$

※ Esercizio 3. Siano

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x^2 - y^2 - 3 = 0\},$$
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + 3y - 1 = 0\},$$
$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + (y-3)^2 - 1 = 0\}.$$

Osserviamo che H è un'iperbole, K una retta e L una circonferenza. Si può notare che H è sconnesso mentre K e L sono connessi. Infatti

$$H = \Big(H \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0\} \Big) \ \cup \ \Big(H \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < 0\} \Big).$$

Inoltre L è compatto, in quanto chiuso e limitato, mentre H e K non lo sono. L è chiuso poiché controimmagine di un chiuso attraverso una funzione continua; infatti $L = f^{-1}(0)$, dove

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^2 + (y-3)^2 - 1$$

è una funzione continua. L è la circonferenza di centro $(0, 3)$ e raggio 1; è limitato perché, per esempio,

$$L \subset B_5((0, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |(x, y)| \leq 5\}.$$

Di conseguenza non esistono omeomorfismi tra i tre spazi.

※ Esercizio 4.

Sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to X$ la proiezione naturale. Ricordiamo che

$$\pi^{-1}([(a, b)]) = \{(a + k, b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definiamo la mappa $f : \mathbb{R}^2 \to C \times \mathbb{R}$ come

$$f(\beta, z) = ((\cos 2\pi\beta, \sin 2\pi\beta), z) \in C \times \mathbb{R}$$

Per costruzione f è suriettiva: sulla seconda componente è l'identità, mentre per la prima componente basta osserche che per ogni $(x, y) \in C$ esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Scegliendo $\beta = \alpha/2\pi$ si ottiene la suriettività. Si ha quindi $f(\mathbb{R}^2) = C \times \mathbb{R}$.

La mappa f è anche continua. Sia infatti A un aperto in $C \times \mathbb{R}$. Posso supporre che A sia del tipo

$$A = \{(\cos\alpha, \sin\alpha) \times (c, d) \in C \times \mathbb{R} \ : \ \alpha \in (a, b)\}.$$

La controimmagine di A è data da

$$f^{-1}(A) = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (a + 2k\pi, b + 2k\pi) \right) \times (c, d),$$

il quale è un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Osserviamo che f è compatibile con la relazione di equivalenza. Infatti

$$f(\beta_1, z_1) = f(\beta_2, z_2) \iff \cos 2\pi\beta_1 = \cos 2\pi\beta_2 \wedge \sin 2\pi\beta_1 = \sin 2\pi\beta_2 \wedge z_1 = z_2$$
$$\iff z_1 = z_2 \quad \wedge \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad : \quad 2\pi\beta_1 = 2\pi\beta_2 + 2k\pi \iff [\beta_1] = [\beta_2].$$

Grazie a tutto questo, f passa al quoziente e si ha dunque una mappa

$$\overline{f} : X^2 (= \mathbb{R}/\sim) \to C \times \mathbb{R}, \qquad \overline{f}([(\beta, z)]) = (\cos 2\pi\beta, \sin 2\pi\beta, z)$$

ben definita, continua, iniettiva e suriettiva. Per mostrare che $\overline{f}$ è un omeomorfismo devo dimostrare che $\overline{f}^{-1}$ è anch'essa continua, cioè che $\overline{f}$ è aperta (osserviamo che X non è compatto). Sia dunque $U \subset X$ un aperto di X. Ricordiamo che ogni punto $[(\beta, z)]$ di X è univocamente determinato da una terna $(\cos 2\pi\beta, \sin 2\pi\beta, z)$ di numeri reali. Ricordando la definizione di topologia quoziente, posso supporre che U sia del tipo

$$U = [(\beta_1, \beta_2) \times (z_1, z_2)] \subset X = \mathbb{R}^2/\sim$$

e siano (γ_1, z_1), (γ_2, z_2) due rappresentanti qualsiasi delle classi $[(\beta_1, z_1)]$ e $[(\beta_2, z_2)]$. L'immagine di U è data da

$$f(U) = \{(\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha) \ : \ \alpha \in (\gamma_1, \gamma_2)\} \times (z_1, z_2) \ \in \ C \times \mathbb{R},$$

il quale è ben definito (non dipende dai rappresentanti γ_i scelti) ed è un aperto. La mappa $\overline{f}$ è perciò l'omeomorfismo cercato.