Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2011/2012

13 luglio 2012

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ il 3–spazio proiettivo reale dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Definiamo i punti A, B, C e D di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ponendo

$$A := [1, -1, 0, 2], \quad B := [1, 0, 1, 3], \quad C := [1, 1, 2, 4], \quad D := [1, -1, 2, 1].$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Si dimostri che i punti A, B e C sono allineati e sia calcoli un sistema di equazioni cartesiane per la retta proiettiva di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per tali punti.
(2) Si dimostri che il punto D non è allineato con A, B e C e si calcoli un'equazione cartesiana del piano proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per A, B, C e D.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y). Definiamo la conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{E}^2$ come

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + 4y^2 + 4xy - 6x + 1 = 0$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si dimostri che $\mathcal{C}$ è una parabola.
(2) Si determini un'isometria diretta $S : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ di $\mathbb{E}^2$ tale che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$ e si calcoli l'asse di simmetria di $\mathcal{C}$.

Esercizio 3. Siano τ_1, τ_2 le topologie su $\mathbb{R}$ definite da

$$\tau_1 = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}, \quad \tau_2 = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$$

(1) Si dica, motivando la risposta, se $(\mathbb{R}, \tau_1)$ è compatto.
(2) Si dica, motivando la risposta, se $(\mathbb{R}, \tau_1)$ è di Hausdorff.
(3) Si dica, motivando la risposta, se $(\mathbb{R}, \tau_1)$ è connesso.
(4) Si provi che una funzione suriettiva $f : (\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$ è un omeomorfismo se e solo se è strettamente monotona decrescente.

Esercizio 4. Sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$ e sia $D = \mathbb{R}/\sim$ con la topologia quoziente, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrare che C e D sono omeomorfi.

Soluzioni

※ Esercizio 1.

(1) Dobbiamo verificare che $\mathrm{rk}(M) = 2$, dove

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Portando avanti il processo di eliminazione di Gauss, si ottiene che

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui è evidente come la matrice M abbia rango 2.

Calcoliamo ora un sistema di equazioni cartesiane per la retta r passante da A e B (e quindi da C):

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

se e solo se

$$\begin{cases} 0 = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -x_0 - x_1 + x_2 \\ \\ 0 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2x_1 + 3x_2 - x_3 \end{cases} .$$

Si ottiene dunque l'equazione della retta:

$$r : \begin{cases} -x_0 - x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} .$$

(2) Dobbiamo verificare che $\mathrm{rk}(N) = 3$, dove N per esempio è data da

$$N := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Come prima, portando avanti il processo di eliminazione di Gauss, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

la quale ha evidentemente rango 3.

Per determinare un'equazione cartesiana del piano proiettivo π contenente i punti A, B e D procediamo come segue:

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = x_0 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$-x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - x_3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 7x_0 + 3x_1 - x_2 - 2x_3$$

e dunque l'equazione cartesiana del piano π diventa

$$\pi : \quad 7x_0 + 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0.$$

※ Esercizio 2.

(1) Consideriamo le matrici associate alla conica $\mathcal{C}$ date da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -32 - 4 = -36 \neq 0$$

La conica $\mathcal{C}$ è dunque non degenere. Calcolando anche

$$\det A_0 = 4 - 4 = 0$$

si dimostra che $\mathcal{C}$ è una parabola.

(2) Calcoliamo la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$.

Partiamo calcolando una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ diagonale per A_0 e concordemente orientata con quella canonica di $\mathbb{R}^2$, in modo tale da eliminare il termine misto. Il polinomio caratteristico di A_0 è dato da

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda(\lambda - 5)$$

Gli autovalori di A_0 sono dunque $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. I corrispondenti autovettori, già normalizzati, sono

$$v_1 := \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Controlliamo l'orientazione:

$$\det(v_1 \quad v_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = -1$$

La base cercata è dunque $\mathcal{B} = (v_2, v_1)$.

Definiamo la matrice $M \in SO(2)$ come

$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

La rotazione indotta da M è

$$R : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 \\ 2x_1 + y_1 \end{pmatrix}$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$ troviamo l'equazione di $R^{-1}(\mathcal{C})$, data da

$$0 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\right)^2 +$$
$$+4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\right) - 6\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right) + 1$$

Termini di secondo grado:

$$\frac{1}{5}\left(x_1^2 + 4y_1^2 + 16x_1^2 + 4y_1^2 + 8x_1^2 - 8y_1^2\right) = \frac{1}{5}\left(25x_1^2\right) = 5x_1^2$$

Termini di primo grado:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-6x_1 + 12y_1\right)$$

Quindi

$$R^{-1}(\mathcal{C}) : 5x_1^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{12}{\sqrt{5}}y_1 + 1 = 0$$

Riscriviamo il termine in x_1:

$$5\left(x_1^2 - \frac{6\sqrt{5}}{25}x_1\right) = 5\left(x_1 - \frac{3\sqrt{5}}{25}\right)^2 - \frac{9}{25}$$

e dunque

$$R^{-1}(\mathcal{C}) : 5\left(x_1 - \frac{3\sqrt{5}}{25}\right)^2 + \frac{12\sqrt{5}}{5}y_1 + \frac{16}{25} = 0$$

che riscritta diventa:

$$R^{-1}(\mathcal{C}) : 5\left(x_1 - \frac{3}{5\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}\left(y_1 + \frac{4}{15\sqrt{5}}\right) = 0$$

Definiamo l'isometria diretta $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ come

$$T : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{3}{5\sqrt{5}} \\ y_1 + \frac{4}{15\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

In questo modo, sostituendo, si ottiene l'equazione della forma canonica:

$$\mathcal{D} : \quad 5x_2^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}y_2 = 0.$$

Osservando i passaggi fatti, si ha $\mathcal{D} = T \circ R^{-1}(\mathcal{C})$, ovvero $S = T \circ R^{-1}$.

Per ricavare l'equazione di S calcoliamo R^{-1}:

$$R^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + y \end{pmatrix}$$

e dunque S è dato da

$$S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{3}{5\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + \frac{4}{15\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Poiché l'asse di simmetria di $\mathcal{D}$ è dato dall'equazione $y_2 = 0$, l'asse di simmetria di $\mathcal{C}$ è dato da

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + \frac{4}{15\sqrt{5}} = 0$$

cioè

$$-30x + 15y + 4 = 0.$$

※ Esercizio 3.

Rispondiamo per punti.

(1) Consideriamo il seguente ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$:
$$\mathcal{A} = \{(m, +\infty) \subset \mathbb{R} \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$
Chiaramente si ha
$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (m, +\infty)$$
e quindi $\mathcal{A}$ costituisce un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$. Da questo ricoprimento non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Supponiamo infatti che, per assurdo, si abbia
$$\mathcal{A}_0 = \{(m_1, +\infty), \dots, (m_k, +\infty)\}$$
un sottoricoprimento finito. Allora, posto $m := \min\{m_1, \dots, m_k\}$, si ha
$$\bigcup_{i=1,\dots,k} (m_i, +\infty) = (m, +\infty) \neq \mathbb{R}$$
e siamo dunque giunti all'assurdo, in quanto tale $\mathcal{A}_0$ non costituisce un ricoprimento di $\mathbb{R}$.

(2) Lo spazio $(\mathbb{R}, \tau_1)$ non è Hausdorff in quanto non è mai possibile trovare aperti disgiunti in τ_1. Di conseguenza, dati due punti distinti, non sarà mai possibile trovare due intorni distinti dei due punti, in quanto questi intorni sarebbero un esempio di due aperti disgiunti della topologia, cosa impossibile.

(3) Per lo stesso motivo del punto precedente, lo spazio $(\mathbb{R}, \tau_1)$ è connesso.

(4) Supponiamo f sia suriettiva e strettamente monotona decrescente e dimostriamo che f sia un omeomorfismo. Essendo strettamente monotona f è iniettiva. Dimostriamo che sia continua. Per la stretta monotonia si ha
$$f^{-1}(-\infty, b) = (f^{-1}(b), +\infty).$$
Infatti, usando la stretta monotonia e la biiettività, si ha
$$\begin{aligned} x \in (f^{-1}(b), +\infty) &\iff x > f^{-1}(b) \iff f(x) < f(f^{-1}(b)) = b \\ &\iff f(x) \in (-\infty, b) \iff x \in f^{-1}(-\infty, b). \end{aligned}$$
Ciò dimostra che f è continua. Per dimostrare che è un omeomorfismo, basta osservare che una funzione continua biiettiva strettamente monotona ha inversa anch'essa strettamente monotona e dunque, per quanto appena visto, anche f^{-1} risulta essere continua.

Supponiamo ora che f sia un omeomorfismo. Ciò significa che
$$f^{-1}(-\infty, y) = (a_y, +\infty), \qquad f(x, +\infty) = (-\infty, b_x)$$
per ogni x e y reali. Essendo f biunivoca per ipotesi, basta dimostrare che f è monotona decrescente. Siano $x_1 < x_2$ due numeri reali e supponiamo per assurdo che $f(x_1) < f(x_2)$. Definiamo
$$m := \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \in (f(x_1), f(x_2)).$$
Allora, poiché $f(x_1) < m$, si ha
$$x_1 \in f^{-1}(-\infty, m) = (a_m, +\infty)$$
e poiché $x_2 > x_1$ si ha anche
$$x_2 \in (x_1, +\infty) \subset (a_m, +\infty) = f^{-1}(-\infty, m)$$

il che significa $f(x_2) < m$, un assurdo.

※ Esercizio 4.

Sia $\pi : \mathbb{R} \to D$ la proiezione naturale. Ricordiamo che
$$\pi^{-1}([y]) = \{y + k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$
Definiamo la mappa $f : \mathbb{R} \to C$ come
$$f(\beta) = (\cos 2\pi\beta, \sin 2\pi\beta).$$
Per costruzione f è suriettiva, poiché per ogni $(x, y) \in C$ esiste $\alpha \subset \mathbb{R}$ tale che $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Basta prender allora $\beta = \alpha/2\pi$. Si ha quindi $f(\mathbb{R}) = C$.

La mappa f è anche continua. Sia infatti A un aperto in C. Posso supporre che A sia del tipo
$$A = \{(\cos\alpha, \sin\alpha) \in C \ : \ \alpha \in (a, b)\}.$$
Allora la controimmagine di A è data da
$$f^{-1}(A) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (a + 2k\pi, b + 2k\pi),$$
il quale è un aperto di $\mathbb{R}$.

Osserviamo che f è compatibile con la relazione di equivalenza. Infatti
$$f(\beta_1) = f(\beta_2) \iff \cos 2\pi\beta_1 = \cos 2\pi\beta_2 \wedge \sin 2\pi\beta_1 = \sin 2\pi\beta_2$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad : \quad 2\pi\beta_1 = 2\pi\beta_2 + 2k\pi \iff [\beta_1] = [\beta_2].$$
Grazie a tutto questo, f passa al quoziente e si ha dunque una mappa
$$\overline{f} : D(= \mathbb{R}/\sim) \to C, \qquad f([\beta]) = (\cos 2\pi\beta, \sin 2\pi\beta)$$
ben definita, continua, iniettiva e suriettiva. Per mostrare che $\overline{f}$ è un omeomorfismo, basta controllare che che C sia di Hausdorff e che D sia compatto. La prima è immediata in quanto C ha la topologia indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^2$, il quale è Hausdorff. Per mostrare che D è compatto si può osservare che
$$D = {}^{\mathbb{R}}\big/_{\sim} = {}^{[0,1)}\big/_{\sim} = {}^{[0,1]}\big/_{\sim},$$
dove la prima uguaglianza deriva dal fatto che ogni classe di equivalenza ammette uno e un solo rappresentante in $[0, 1)$ (in particolare, $[x] = [x - \mathrm{pt}(x)]$, dove $\mathrm{pt}(x)$ denota la parte intera di x) mentre la seconda uguaglianza si ottiene osservando che $[1] = [0]$. Poiché $[0, 1]$ è compatto, anche D è compatto e la dimostrazione è dunque conclusa.