Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2011/2012

14 febbraio 2013

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^3$ il 3-spazio euclideo dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z) e sia $\pi_1(k)$ il piano passante per $P(k) = (1, k, -1)$ e contenente la retta

$$r_1 : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - z = 2 \end{cases} .$$

Sia $\pi_2(k)$ il piano

$$3x - (k + 1)y + z - 2k = 0.$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi_1(k)$.
(2) Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tali per cui $\pi_1(k)$ e $\pi_2(k)$ siano paralleli.
(3) Per i valori di k determinati al punto (2), calcolare la distanza tra i due piani.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ il piano euclideo reale dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y). Definiamo la conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ come

$$\mathcal{C} : \quad 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 3 = 0$$

Si calcoli la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$, determinando un'isometria diretta $S : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ di $\mathbb{E}^2$ tale che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

Esercizio 3. Sia X un insieme e sia $p \in X$ un elemento fissato. Si consideri l'insieme

$$\tau = \{A \subseteq X \mid p \in A\} \cup \{\emptyset\}.$$

(1) Si provi che τ è una topologia su X.
(2) Si provi che lo spazio topologico (X, τ) è connesso.
(3) Sia $q \in X$ un punto distinto da p. Si determini interno, chiusura e frontiera dei seguenti sottoinsiemi:

$$A_1 = \{p\}, \qquad A_2 = \{q\}.$$

Esercizio 4. Si consideri $\mathbb{R}^2$ munito della topologia standard e sia $X = A \cup B$ definito dall'unione di

$$A = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\}, \qquad B = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n, \quad B_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = \frac{x}{n}, \quad x \in [0, 1]\right\}.$$

Dimostrare che X è connesso.

Soluzioni

※ Esercizio 1.

(1) Ricaviamo l'equazione del piano $\pi_1(k)$. Osserviamo innanzitutto che $P(k) \notin r_1$ per qualsiasi valore di k, perché le sue coordinate non verificano la seconda delle equazioni che definiscono la retta. Consideriamo allora il fascio proprio di piani passanti per r

$$x - y + 2z + t(2x - z - 2) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}$$

e imponiamo la condizione di passaggio per $P(k)$:

$$1 - k - 2 + t(2 + 1 - 2) = 0 \quad \to \quad t = k + 1.$$

Il piano $\pi_1(k)$ ha dunque equazione

$$\pi_1(k) : x - y + 2z + (k + 1)(2x - z - 2) = 0$$

che riscritta diventa

$$\pi_1(k) : (3 + 2k)x - y + (1 - k)z - 2k - 2 = 0$$

(2) I due piani sono paralleli se e solo se la matrice data dai coefficienti delle rispettive equazioni omogenee ha rango 1 o, equivalentemente, se e solo se i due vettori normali sono tra loro proporzionali. In altri termini deve essere

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 3+2k & -1 & 1-k \\ 3 & -k-1 & +1 \end{pmatrix} = 1$$

oppure, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 3+2k \\ -1 \\ 1-k \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -k-1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

La seconda corrisponde al sistema

$$\begin{cases} 3 + 2k = 3\lambda \\ -1 = -\lambda k - \lambda \\ 1 - k = \lambda \end{cases} \to \begin{cases} 3 + 2k = 3 - 3k \\ -1 = -k + k^2 - 1 + k \\ 1 - k = \lambda \end{cases} \to \begin{cases} k = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Di conseguenza i due piani sono paralleli se e solo se $k = 0$.

(3) Consideriamo il caso $k = 0$. In questo caso le equazioni dei due piani diventano:

$$\pi_1(0) : 3x - y + z - 2 = 0, \qquad \pi_2(0) = 3x - y + z = 0.$$

Per determinare la distanza tra i due piani si può scegliere un punto su $\pi_1(0)$ come ad esempio $P(0) = (1, 0, -1)$ e calcolare $d(P(0), \pi_2(0))$. Si ottiene

$$d(\pi_1(0), \pi_2(0)) = d(P(0), \pi_2(0)) = \frac{|3 \cdot 1 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{9 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{11}}.$$

※ Esercizio 2.

Consideriamo le matrici associate alla conica $\mathcal{C}$ date da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo i determinanti si vede che

$$\det A = 9 \neq 0, \quad \det A_0 = 3 > 0.$$

La conica $\mathcal{C}$ è dunque un'ellisse non degenere.

Calcoliamo una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ diagonale per A_0 e concordemente orientata con quella canonica di $\mathbb{R}^2$. Il polinomio caratteristico di A_0 è dato da

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

Gli autovalori di A_0 sono dunque $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$.

I corrispondenti autovettori, già normalizzati, sono

$$v_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Controlliamo l'orientazione:

$$\det(v_1 \quad v_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -1$$

La base cercata è dunque $\mathcal{B} = (v_2, v_1)$. Definiamo la matrice $M \in SO(2)$ come

$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

La rotazione indotta da M è

$$R : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ -x_1 + y_1 \end{pmatrix}$$

L'equazione di $R^{-1}(\mathcal{C})$ si ottiene da

$$0 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right)^2 + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right)^2 +$$

$$+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right) + 3$$

Termini di secondo grado:

$$\frac{1}{2}\left(2x_1^2 + 2y_1^2 + 2x_1^2 + 2y_1^2 - 2x_1^2 + 2y_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(2x_1^2 + 6y_1^2\right) = x_1^2 + 3y_1^2$$

Non ci sono termini di primo grado, quindi

$$R^{-1}(\mathcal{C}) : \qquad x_1^2 + 3y_1^2 + 3 = 0$$

o, equivalentemente,

$$R^{-1}(\mathcal{C}) : \qquad \frac{x_1^2}{3} + y_1^2 = -1$$

la quale è già in forma canonica. La trasformazione cercata è dunque $S = R^{-1}$. Ricaviamo R^{-1} da

$$S = R^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix},$$

ovvero

$$S : (x_1, y_1) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right).$$

※ Esercizio 3.

(1) Chiaramente si ha $\emptyset, \mathbb{R} \in \tau$.
Proviamo che τ è chiusa per unione. Sia $\mathcal{A} = \{A_i\} \subset \tau$ una collezione di elementi di τ. Si possono distinguere due casi: ogni elemento $A \in \mathcal{A}$ verfica $A = \emptyset$ oppure esiste almeno un elemento $A_0 \in \mathcal{A}$ tale che $A \neq \emptyset$. In particolare, in questo caso, per definizione di τ si ha $p \in A_0$.
Calcoliamo l'unione degli elementi appartenenti alla collezione $\mathcal{A}$: nel primo caso $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \emptyset \in \tau$, nel secondo caso $p \in A_0 \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \in \tau$. La collezione di insiemi τ è dunque chiusa per unioni arbitrarie.

Proviamo ora che τ è chiusa per intersezione finita. Siano $A_1, \ldots, A_n$ elementi di τ. Si hanno ancora due casi: uno di essi è vuoto e allora $\bigcap_k A_k = \emptyset \in \tau$ oppure sono tutti non vuoti e quindi $p \in A_k$ per ogni k. In questo caso $p \in \bigcap_k A_k \in \tau$. La collezione di insiemi τ è dunque anche chiusa per intersezioni finite ed è dunque una topolgia.

(2) Per definizione, due aperti non vuoti contengono entrambi p e quindi la loro intersezione è sempre non vuota. Lo spazio è dunque connesso.

(3) Considero l'insieme A_1. Poiché $\{p\}$ è un aperto di (X, τ), la sua parte interna (ovvero il più grande aperto di (X, τ) contenuto) è $\{p\}$ stesso. La chiusura di $\{p\}$ (ovvero il più piccolo chiuso di (X, τ) che lo contiene) è X, perché non esistono chiusi propri (cioè del tipo $\{A \subset X \mid p \notin A\}$) contenenti $\{p\}$. La frontiera di $\{p\}$ (ovvero la differenza insiemistica fra la sua chiusura e la sua parte interna) è $X \setminus \{p\}$. Riassumendo:

$$\overset{\circ}{\{p\}} = \{p\}, \quad \overline{\{p\}} = X, \quad \partial\{p\} = X \setminus \{p\}.$$

Considero l'insieme A_2. La parte interna di $\{q\}$ (ovvero il più grande aperto di (X, τ) contenuto) è $\emptyset$, perché non esistono aperti propri (cioè del tipo $\{A \subset X \mid p \in A\}$) contenuti in $\{q\}$. Poiché $\{q\}$ è un chiuso di (X, τ), la sua chiusura (ovvero il più piccolo chiuso di (X, τ) che lo contiene) è $\{q\}$ stesso. La frontiera di $\{q\}$ (ovvero la differenza insiemistica fra la sua chiusura e la sua parte interna) è $\{q\} \setminus \emptyset = \{q\}$. Riassumendo:

$$\overset{\circ}{\{q\}} = \emptyset, \quad \overline{\{q\}} = \{q\}, \quad \partial\{q\} = \{q\}.$$

※ Esercizio 4.

(1) L'insieme A è connesso e così pure l'insieme B (il punto $(0,0)$ è comune a tutti i "segmentini"). Inoltre $A \cap B = \emptyset$. L'unica possibilità affinché $X = A \cup B$ sia sconnesso è che A e B siano loro stessi due aperti di X, cioè che esistano due aperti U_1 e U_2 di $\mathbb{R}^2$ tali che

$$A = X \cap U_1, \qquad B = X \cap U_2.$$

Consideriamo un punto $p = (x_0, 0) \in A$ con $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Allora U_1 è un intorno di p. Definiamo la successione

$$y_n := \frac{x_0}{n}, \qquad p_n = (x_0, y_n), \qquad n \geq 1.$$

Ovviamente si ha $p_n \to p$ per $n \to \infty$ e $p_n \in B$ per ogni valore di n. Tuttavia, in quanto limite, $p \in U_1$ è punto di accumulazione per l'insieme $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e dunque, essendo U_1 un intorno di p, si ha

$$U_1 \cap \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \emptyset.$$

Poiché $U_1 \cap \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U_1 \cap B$, ciò significa che

$$U_1 \cap B \neq \emptyset$$

e dunque

$$A \cap B = (X \cap U_1) \cap B = X \cap (U_1 \cap B) \neq \emptyset,$$

il che è un assurdo in quanto $A \cap B = \emptyset$. L'insieme X è dunque connesso.