Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2011/2012

17 gennaio 2013

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^4$ il 4-spazio numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z, w). Sia π il 2-piano affine definito da

$$\pi : \begin{cases} z + w = 1 \\ x - y - w = 0 \end{cases}$$

e sia r la retta definita da

$$r : \begin{cases} y + z + 2w = -1 \\ x - y + z = 0 \\ y + w = 0 \end{cases}$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si dimostri che r è parallela a π.
(2) Dato $A = (1, 0, -1, 0) \in r$, si determini la proiezione ortognale P di A su π.
(3) Si determini la distanza di r da π.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ il piano proiettivo complesso numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Definiamo la conica $\mathcal{C}(k)$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ come

$$\mathcal{C}(k) : \quad 3x_1^2 + (k + 1)x_2^2 + 2x_0x_1 - x_0x_2 + kx_1x_2 = 0$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si determini la forma canonica $\mathcal{D}(k)$ di $\mathcal{C}(k)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(2) Nel caso $k = 0$, si determini la proiettività $S : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che $S(\mathcal{C}(0)) = \mathcal{D}(0)$.

Esercizio 3. Dire, motivando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono o meno omeomorfi tra di loro:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\},$$
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\},$$
$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \neq 1\}.$$

Esercizio 4. Si considerino su $\mathbb{R}$ le seguenti due topologie:

$$\tau_1 : \text{ topologia generata da } \mathcal{B} := \{[a, b) \subset \mathbb{R} \ : \ a < b\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\},$$
$$\tau_2 = \{A \subset \mathbb{R} \ : \ A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\},$$

dove τ_2 è la topologia discreta. Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base.
(2) Data una funzione $f : (\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$ costante, dimostrare che f è continua.

Soluzioni

※ Esercizio 1.

(1) Riscriviamo r in coordinate parametriche

$$\begin{cases} y+z+2w=-1 \\ x-y+z=0 \\ y+w=0 \end{cases} \to \begin{cases} w=t \\ y=-t \\ x=-t-z \\ z=-1-2t+t \end{cases} \to \begin{cases} x=1 \\ y=-t \\ z=-1-t \\ w=t \end{cases}$$

Di conseguenza un vettore di direzione di r è dato da $v=(0,-1,-1,1)$. Per dimostrare che r sia parallela a π basta verificare che le coordinate di v soddisfino le equazioni omogenee di π, cioè che v sia contenuto nella giaciutura di π:

$$\begin{cases} z+w=0 \\ x-y-w=0 \end{cases} \to \begin{cases} -1+1=0 \\ 1-1=0 \end{cases} .$$

(2) **MODO 1**

Cerchiamo due generatori della giacitura del piano π. Ricordiamo che la giacitura è

$$\pi_0 : \begin{cases} z+w=0 \\ x-y-w=0 \end{cases} \to \begin{cases} w=t \\ z=-t \\ y=s \\ x=s+t \end{cases} \to \begin{cases} x=s+t \\ y=s \\ z=-t \\ w=t \end{cases}$$

Ciò implica che π_0 è generato da vettori del tipo

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza una base per π_0 è data da

$$v_1=(1,0,-1,1), \qquad v_2=(1,1,0,0).$$

Un vettore perpendicolare a π è dato per esempio da $w=(0,0,1,1)$, in quando $v_1 \cdot w = v_2 \cdot w = 0$. Una retta passante per A e perpendicolare a π è dunque:

$$\sigma : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

le cui equazioni cartesiane sono:

$$\sigma : \begin{cases} x=1, \\ y=0, \\ z-w+1=0 \end{cases}$$

Intersechiamo ora σ con π per trovare il punto P proiezione ortognale di A:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \\ z - w + 1 = 0, \\ z + w - 1 = 0, \\ x - y - w = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \\ w = 1, \\ z = 0 \end{cases}.$$

La proiezione ortogale di A su π è $P = (1, 0, 0, 1)$.

MODO 2

Per determinare la distanza da r da π scegliamo innanzittutto un punto $A \in r$ e $B \in \pi$, per esempio

$$A = (1, 0, -1, 0) \in r, \qquad B = (1, 0, 0, 1) \in \pi.$$

Detta P la proiezione ortogonale di A su π, la distanza di r da π si ottiene come

$$d(r, \pi) = d(A, P).$$

Cerchiamo due generatori della giacitura del piano π. Ricordiamo che la giacitura è

$$\pi_0 : \begin{cases} z + w = 0 \\ x - y - w = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} w = t \\ z = -t \\ y = s \\ x = s + t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = s + t \\ y = s \\ z = -t \\ w = t \end{cases}$$

Ciò implica che π_0 è generato da vettori del tipo

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza una base per π_0 è data da

$$v_1 = (1, 0, -1, 1), \qquad v_2 = (1, 1, 0, 0).$$

Per determinare il vettore $\overrightarrow{AP}$ scomponiamolo prima come somma di

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$$

con

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 0, 1, 1).$$

Poiché $P \in \pi$, esistono unici $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\overrightarrow{BP} = \lambda v_1 + \mu v_2.$$

Inoltre, per definizione di proiezione ortogonale, si ha

$$\langle \overrightarrow{AP}, v_1 \rangle = 0, \qquad \langle \overrightarrow{AP}, v_2 \rangle = 0.$$

Mettendo insieme le cose si ottiene

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}, v_1 \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \langle \overrightarrow{BP}, v_1 \rangle = -\langle \overrightarrow{AB}, v_1 \rangle \\ \langle \overrightarrow{BP}, v_1 \rangle = -\langle \overrightarrow{AB}, v_2 \rangle \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda \langle v_1, v_1 \rangle + \mu \langle v_2, v_1 \rangle = -\langle \overrightarrow{AB}, v_1 \rangle \\ \lambda \langle v_1, v_2 \rangle + \mu \langle v_2, v_2 \rangle = -\langle \overrightarrow{AB}, v_2 \rangle \end{cases}$$

Ora

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 3, \quad \langle v_2, v_2 \rangle = 2, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 1$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, v_1 \rangle = 0, \quad \langle \overrightarrow{AB}, v_2 \rangle = 0$$

Ciò significa che $\overrightarrow{AB}$ stesso è ortogonale a π e, per l'unicità della proiezione ortogonale, ciò implica $P = B$. Svolgemendo ugualmente i conti, si ottiene

$$\begin{cases} 3\lambda + \mu = 0, \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

da cui $\lambda = \mu = 0$ e quindi $P = B$ come appena osservato.

(3) Poiché r è parallela a π, la sua distanza dal piano è data da

$$d(r, \pi) = d(A, P) = d(A, B) = \sqrt{(1-1)^2 + 0 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

※ Esercizio 2.

(1) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}(k)$ è data da

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & k/2 \\ -\frac{1}{2} & k/2 & k+1 \end{pmatrix},$$

Si ha $\det A(k) = \frac{3}{2}k - \frac{7}{4}$ e dunque $\det A(k) = 0$ se e solo se

$$\det A(k) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k = -\frac{7}{6}.$$

Per i valori di k diversi da $-\frac{7}{6}$ la conica $\mathcal{C}(k)$ è non degenere con forma canonica

$$\mathcal{D}(k): \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Per $k = -\frac{7}{6}$ la conica è degenere. Per determinare la forma canonica basta calcolare il rango della matrice $A\left(-\frac{7}{6}\right)$, la quale è data da

$$A\left(-\frac{7}{8}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -\frac{7}{12} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Poiché il rango di $A\left(-\frac{7}{6}\right)$ è due, la forma canonica di $\mathcal{C}\left(-\frac{7}{6}\right)$ è data da

$$\mathcal{D}\left(-\frac{7}{6}\right): \quad x_0^2 + x_1^2 = 0.$$

(2) Sia $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0)$ e $\mathcal{D} = \mathcal{D}(0)$. Calcoliamo una proiettività $S : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$ mediante la tecnica di completamento dei quadrati:

$$3x_1^2 + \mathbf{x_2^2} + 2x_0x_1 - \mathbf{x_0x_2} = 3x_1^2 + (\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0})^{\mathbf{2}} - \mathbf{x_0^2} + x_0x_1 =$$

$$= 4x_1^2 + (x_2 - x_0)^2 - (x_0 - x_1)^2 = (2x_1)^2 + (x_2 - x_0)^2 + (ix_0 - ix_1)^2$$

Definiamo S ponendo ad esempio

$$S : [x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_2 - x_0, 2x_1, ix_0 - ix_1].$$

Per costruzione, $\mathcal{D} = S(\mathcal{C})$ è la trasformazione cercata.

※ Esercizio 3.

Osserviamo che L è sconnesso mentre K e H non lo sono. Quindi

$$L \not\approx H, \quad L \not\approx K.$$

Per dimostrare che nemmeno H e K sono omeomorfi basta osservare che K meno due punti è sconnesso mentre H meno due punti non lo sarà mai. Alternativamente, si può osservare che

$$\overset{\circ}{H} = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\}, \qquad \overset{\circ}{K} = \emptyset$$

e dunque i due spazi non possono essere omeomorfi.

※ Esercizio 4.

(1) È immediato verificare che l'intersezione di due elementi del tipo $[a, b)$ e $[a', b')$ è ancora del tipo $[a'', b'')$. In particolare, se $[a, b) \cap [a', b') \neq \emptyset$ si ha

$$[a, b) \cap [a', b') = [\max(a, a'), \min(b, b')).$$

Poiché poi $\mathcal{B}$ ricopre $\mathbb{R}$ e contiene sia il vuoto sia $\mathbb{R}$ stesso, si è dimostrato che $\mathcal{B}$ è una base di una topologia.

(2) Dimostriamo che, se f è costante, allora f è continua. Sia dunque $f(x) = a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora si ha

$$f^{-1}(\{a\}) = \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(\{b\}) = \emptyset \quad \forall b \neq a.$$

Poiché nella topologia discreta ogni punto è un aperto, ciò conclude la dimostrazione della prima implicazione.